宇宙論の物理

〈下〉

松原隆彦

東京大学出版会

宇宙論の物理

〈下〉

松原隆彦

東京大学出版会

Physical Foundations of Cosmology II
Takahiko MATSUBARA
University of Tokyo Press, 2014
ISBN978-4-13-062616-3

下巻目次

上巻目次

本書における単位系

本書を通じて採用されている単位系について説明する．真空中の光速度 c，換算プランク定数 $\hbar$，ボルツマン定数 k_B は，それぞれ物理的な次元を持つ普遍的な定数である．すると，長さ，質量，時間の 3 つの基本単位のうち任意の 2 つと，温度の単位を適切に選ぶことにより

$$c = \hbar = k_B = 1 \tag{0.1}$$

とすることができる．このように普遍的な物理定数が 1 になるように選んだ単位系を**自然単位系** (natural units) という．さらに本書では，電磁気学の単位についてヘ**ビサイド-ローレンツ単位系** (Heaviside-Lorentz units) を採用する．この単位系では真空の誘電率 ϵ_0 と真空の透磁率 μ_0 を

$$\epsilon_0 = \mu_0 = 1 \tag{0.2}$$

とする．

本書ではとくに断らない限り，上に説明した自然単位系とヘビサイド-ローレンツ単位系を用いる．この単位系では時間と長さの次元は等しくなり，質量，温度，エネルギーは長さの逆数の次元に等しくなる．また電荷は無次元量になる．すべての物理量は 1 つの基本次元だけを持ち，たとえば長さの単位のみ，あるいはエネルギーの単位のみ，など任意の 1 つの単位だけですべての物理量が表される．

自然単位で表された物理量を一般の単位系の量に戻すには，その量が持つ本来の単位が正しく出るように，適切に $c, \hbar, k_B, \epsilon_0, \mu_0$ のべきを乗じる．SI 単位系を例にとると，量 $c^\alpha \hbar^\beta {k_B}^\gamma {\epsilon_0}^\delta {\mu_0}^\epsilon$ の単位は

$$[\,\mathrm{m}^{\alpha+2\beta+2\gamma-3\delta+\epsilon} \cdot \mathrm{kg}^{\beta+\gamma-\delta+\epsilon} \cdot \mathrm{s}^{-\alpha-\beta-2\gamma+4\delta-2\epsilon} \cdot \mathrm{A}^{2\delta-2\epsilon} \cdot \mathrm{K}^{-\gamma}] \tag{0.3}$$

となる．

たとえば圧力 p と温度 T の関係が自然単位で $p = aT^4$ と表されている場合を考える．ここで a は無次元の数とする．自然単位では両辺とも [長さ]$^{-4}$ の次元に揃っている．SI 単位系では圧力の単位は $[\mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^{-2}]$，温度の単位は [K] であるから，右辺に $c^\alpha \hbar^\beta {k_B}^\gamma {\epsilon_0}^\delta {\mu_0}^\epsilon$ を乗じて単位が揃うことを要請すると，$\alpha = \beta = -3$, $\gamma = 4, \delta = \epsilon = 0$ となる．したがって一般の単位系では $p = a{k_B}^4 T^4/\hbar^3 c^3$ となるべ

きことがわかる．このようにして，自然単位で表された物理量はいつでも通常の単位系に戻すことができる．

第 6 章

相対論的運動学

宇宙の中にはさまざまな粒子が存在し，その間に働く相互作用によって運動状態を変えたり，粒子の種類自体を転換したりする．宇宙の中に存在する粒子数は膨大である．個々の粒子の運動よりも，粒子群の統計的な振る舞いが，宇宙全体の進化にとって重要な役割を果たす．平衡状態においては，物理状態が熱力学変数だけを用いて単純な形で表される．だが，宇宙の進化の過程においては非平衡状態が重要な場合もある．宇宙論においては，変化する時空中での粒子の振る舞いを調べる必要がある．本章では，一般相対論的な時空中における，非平衡系の統計力学的な取り扱いについて述べる．

6.1　相対論的分布関数と巨視的変数

ある粒子種に着目するとき，位相空間中での分布関数 $f(x,P)$ を考える．ここで (x,P) は時空座標 x^μ および 4 元運動量 P^μ からなる 8 次元空間を表している．時空計量 $g_{\mu\nu}$ の行列式を $g = \det(g_{\mu\nu})$ とすると，時空の不変体積要素は式 (1.101) で与えられたように $\sqrt{-g}\,d^4x$ である．また，4 元運動量も 4 元ベクトルであるから，その不変体積要素も同様の形 $\sqrt{-g}\,d^4P$ である．したがって，位相空間の不変体積要素は $-g\,d^4x\,d^4P$ となる．考えている粒子種の質量を m とするとき，式 (1.197) により 4 元運動量は

$$P^\mu P_\mu + m^2 = 0 \tag{6.1}$$

を満たす．4 元運動量の 4 成分からなる 4 次元空間を考えるとき，上の条件を満たす 3 次元超曲面を**質量殻** (mass-shell) という．質量の固定された粒子種に対して，物理的な運動量は必ず質量殻上にある．したがって，物理的な位相空間の自由度は 7 であり，8 次元位相空間中に定義される分布関数 $f(x,P)$ は，質量殻の条件を満

たす 7 次元超面上にのみ値を持つ．また，粒子のエネルギー $E = P^0$ は正であるという条件を満たす．そこで，運動量空間の物理的な 3 次元不変運動量要素として，次の量を定義する：

$$d\Pi \equiv \frac{\sqrt{-g}\, d^4 P}{(2\pi)^3}\, \Theta\!\left(P^0\right) \delta_{\mathrm{D}}\!\left(P_\mu P^\mu + m^2\right) \tag{6.2}$$

ただし Θ は式 (3.133) で定義される階段関数である．本義ローレンツ変換によってエネルギー P^0 の符号が変化しないことに注意すれば，上の量は一般座標変換に対して値が不変なスカラー量であることがわかる．

この運動量空間体積要素 $d\Pi$ には，質量殻上にだけ値を持つデルタ関数が含まれている．このため，そこにかかる因子はすべて質量殻上の値となり，エネルギー P^0 について積分してしまうことができる．一般の計量 $g_{\mu\nu}$ を持つ時空において，質量殻の条件式 (6.1) は

$$g_{00}(P^0)^2 + 2g_{0i}P^0P^i + g_{ij}P^iP^j + m^2 = 0 \tag{6.3}$$

となる．この 2 次方程式から正エネルギー $(P^0 > 0)$ の解が具体的に求められ，

$$P^0 = \frac{g_{0i}P^i + \sqrt{\left(g_{0i}P^i\right)^2 - g_{00}\left(g_{ij}P^iP^j + m^2\right)}}{-g_{00}} \tag{6.4}$$

となる．ただし，物理的な時空では $g_{00} < 0$ である．デルタ関数の性質 (B.3) を使い，式 (6.4) の解を用いて式 (6.2) を具体的に P^0 で積分すると，

$$d\Pi = \frac{\sqrt{-g} d^3 P}{2\sqrt{\left(g_{0i}P^i\right)^2 - g_{00}\left(g_{ij}P^iP^j + m^2\right)}} \tag{6.5}$$

が得られる．局所ミンコフスキー時空においては，$g_{00} = g = -1, g_{0i} = 0, g_{ij} = \delta_{ij}$ であるから，上の式は

$$d\Pi = \frac{d^3 P}{(2\pi)^3 2P^0} \tag{6.6}$$

となる．ただし $P^0 = \sqrt{|\boldsymbol{P}|^2 + m^2}$ は 3 次元運動量 $\boldsymbol{P}$ の従属変数とする．右辺はこの局所ミンコフスキー時空でスカラーである．

式 (6.2) の $d\Pi$ には P^0 の積分が残っていて，式 (6.5), (6.6) では積分されているという違いがあるが，後者の P^0 が質量殻上の値である限り，積分の中で果たす役割は同じである．この意味では，式 (6.2) の $d\Pi$ も事実上は 3 次元の積分要素である．

密度や圧力など，多数の粒子に対する巨視的変数は分布関数の平均量として表される．まず粒子の数密度について考える．局所ミンコフスキー時空では，分布関数を単に運動量で積分したものが数密度であるから，

$$n(\boldsymbol{x},t) = \int \frac{d^3P}{(2\pi)^3} f(x,P) \tag{6.7}$$

である．これを一般座標の 3 次元スカラー量で書き直すと

$$n(\boldsymbol{x},t) = 2\int d\Pi P^0 f(x,P) \tag{6.8}$$

となる．次に，この量を時間成分とするような 4 元ベクトル

$$N^\mu(x) = 2\int d\Pi P^\mu f(x,P) \tag{6.9}$$

を定義する．これを**粒子 4 元流束** (particle 4-flow) という．この 4 元ベクトルの成分を

$$(N^\mu) = (n, \boldsymbol{j}) \tag{6.10}$$

と表すとき，空間成分は局所ミンコフスキー時空において

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t) = \int \frac{d^3P}{(2\pi)^3} \frac{\boldsymbol{P}}{P^0} f(x,P) \tag{6.11}$$

となる．式 (1.44) に述べたように積分中の $\boldsymbol{P}/P^0$ は粒子の 3 次元速度であるから，上式は空間方向の平均的な粒子の流れを表す量となっている．すなわち，粒子 4 元流束 N^μ は，粒子の数密度と空間方向の平均的な流れを組み合わせて作られた 4 元ベクトル量である．

次に，エネルギー運動量テンソルと分布関数の関係を見ておく．そのためには，上と同様にまず局所ミンコフスキー時空で考えてから，それを一般座標に書き換えればよい．局所ミンコフスキー時空におけるエネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ の各成分の物理的意味は 1.1.6 項で説明した．まず成分 T^{00} はエネルギー密度に対応するから，1 粒子あたりのエネルギー P^0 を分布関数で平均した量

$$T^{00}(x) = \int \frac{d^3P}{(2\pi)^3} P^0 f(x,P) \tag{6.12}$$

で与えられる．さらに成分 T^{0i} は空間座標 x^i が一定の面を横切るエネルギーの流れに対応するから，

$$T^{0i}(x) = \int \frac{d^3P}{(2\pi)^3} P^0 v^i f(x,P) \tag{6.13}$$

となる．ここで，$v^i = P^i/P^0$ は粒子の 3 次元速度である．また，成分 T^{i0} は運動量 P^i の密度に対応するから

$$T^{i0}(x) = \int \frac{d^3P}{(2\pi)^3} P^i f(x, P) \tag{6.14}$$

である．最後に成分 T^{ij} は x^j 方向への運動量 P^i の流れに対応するから，

$$T^{ij}(x) = \int \frac{d^3P}{(2\pi)^3} P^i v^j f(x, P) \tag{6.15}$$

となる．

エネルギー運動量テンソルは 4 元テンソルなので，上に求めた各成分は共変な形にまとめられるはずである．実際，式 (6.12)–(6.15) はすべて

$$T^{\mu\nu}(x) = \int \frac{d^3P}{(2\pi)^3 P^0} P^\mu P^\nu f(x, P) \tag{6.16}$$

の成分になっている．つまり，エネルギー運動量テンソルは分布関数の運動量に関する 2 次のモーメントであると理解できる．上の形は局所ミンコフスキー時空における形であるから，それを一般座標に書き換えることで

$$T^{\mu\nu}(x) = 2 \int d\Pi P^\mu P^\nu f(x, P) \tag{6.17}$$

が得られる．この式がエネルギー運動量テンソルと分布関数の一般的な関係を与える．

6.2 ボルツマン方程式

分布関数は粒子の統計的な振る舞いを表す基本的な関数である．分布関数の時間発展はボルツマン方程式によって記述される．以下では，一般の時空における相対論的なボルツマン方程式を導出する．

6.2.1 リュービルの定理

粒子が重力の影響を受けながら運動し，重力以外の力が働かないとき，その粒子の軌跡は式 (1.196) で導かれた測地線方程式

$$\frac{dP^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} P^\nu P^\lambda = 0 \tag{6.18}$$

にしたがう．ここで，

$$P^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \tag{6.19}$$

は 4 元運動量，また λ は軌跡上にとったアフィン・パラメータである．

ここで 8 次元位相空間の不変体積要素

$$d\Omega = -g\, d^4x\, d^4P \tag{6.20}$$

に含まれている複数粒子の集団を考える．粒子は時刻ごとに決まった運動量を持って 4 次元時空中の世界線上を動くので，8 次元位相空間中の軌跡は 1 次元的な曲線で表される．ある決まった質量を持つ粒子群については，その軌跡曲線が質量殻上に分布する．前節でも述べたように，8 次元位相空間の中で条件

$$P^\mu P_\mu + m^2 = 0 \tag{6.21}$$

を満たす 7 次元超曲面上に，粒子の軌跡曲線が束になって分布する．ある微小な位相空間体積要素に含まれる粒子の集団を考えると，測地線に沿って運動することにより，この集団が占める位相空間要素は時間とともに別の場所へ移動する．このとき，「粒子の集団が占める位相空間要素の大きさは，運動に沿って不変に保たれる」という重要な性質がある．このことを以下に示す．

まず，粒子の微小運動によるアフィン・パラメータの変化を $\delta\lambda$ とする．式 (6.18), (6.19) により，微小運動後の位相空間における座標値は

$$x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu = x^\mu + P^\mu \delta\lambda \tag{6.22}$$

$$P'^\mu = P^\mu + \delta P^\mu = P^\mu - \Gamma^\mu_{\nu\rho} P^\nu P^\rho \delta\lambda \tag{6.23}$$

である．次に，8 次元位相空間の 8 次元体積要素 $d^4x\, d^4P$ を，多数の粒子軌跡が貫いているとする．この体積要素内にある軌跡のアフィン・パラメータをすべて同じ微小量 $\delta\lambda$ だけ増やすと，その体積要素は式 (6.22), (6.23) の変換により中心点が移動して $d^4x'\, d^4P'$ となる．8 次元体積要素の変化は，変換のヤコビアン J を用いて，

$$\delta\left(d^4x\, d^4P\right) = (J-1)d^4x\, d^4P \tag{6.24}$$

で与えられる．微小変化に対する 1 次近似によってこのヤコビアンを求めると，

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} & \dfrac{\partial P'^\nu}{\partial x^\alpha} \\ \dfrac{\partial x'^\mu}{\partial P^\beta} & \dfrac{\partial P'^\nu}{\partial P^\beta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta^\mu_\alpha & 0 \\ \delta^\mu_\beta \delta\lambda & \delta^\nu_\beta - 2\Gamma^\nu_{\beta\rho} P^\rho \delta\lambda \end{vmatrix} = 1 - 2\Gamma^\mu_{\mu\nu} P^\nu \delta\lambda \tag{6.25}$$

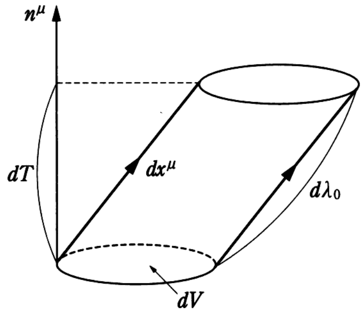


図 6.1 アフィン・パラメータ間隔 λ_0 が作る 4 次元体積の説明図.

が得られる．ただし，式 (6.23) の $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$ は微小運動前の値であり，粒子座標 x^μ には依存しないことに注意する．式 (1.102), (1.124) および式 (6.22) を用いると，

$$2\Gamma^\mu_{\mu\nu}P^\nu\delta\lambda = g^{\mu\nu}g_{\mu\nu,\lambda}\delta x^\lambda = \frac{\delta g}{g} \tag{6.26}$$

が成り立つ．したがって，式 (6.20) の位相空間不変体積要素の変化は，式 (6.24)-(6.26) により，

$$\delta\left(-g\, d^4x\, d^4P\right) = -g\,\delta(d^4x\, d^4P) - \delta g\, d^4x\, d^4P = -g\left[(J-1) + \frac{\delta g}{g}\right]d^4x\, d^4P = 0 \tag{6.27}$$

となる．つまり，8 次元位相空間の体積要素に含まれる世界線の束について，アフィン・パラメータの値を共通に変化させるとき，その世界線の束が占める位相空間の体積は変化しない．

次に，時空のある点に $n_\mu n^\mu = -1$ を満たす任意の時間的単位ベクトル n^μ を考え，これと垂直になる空間的な 3 次元体積要素を dV とする．この量 dV は，単位ベクトル n^μ を 4 元速度に持つ観測者にとって，実際の空間体積要素に対応する．この 3 次元体積要素の中に，4 元運動量 P^μ を持つ粒子群を考える．この粒子群のアフィン・パラメータをすべて $d\lambda_0$ だけ変化させるときに描く軌跡の集合によって，4 次元体積要素が作られる（図 6.1）．この変化における粒子群の微小座標変化は $dx^\mu = P^\mu d\lambda_0$ である．このとき，3 次元体積要素 dV に垂直な方向 n^μ への時間間隔は $dT = -n_\mu dx^\mu = -n_\mu P^\mu d\lambda_0$ で与えられるので，対応する 4 次元不変体積要素は

$$\sqrt{-g}\, d^4x = dT\, dV = -n_\mu P^\mu\, dV\, d\lambda_0 \tag{6.28}$$

となる．ただし n^μ も P^μ も時間的ベクトルであるから $n_\mu P^\mu < 0$ である．この式に $d\Pi$ をかけることにより，

$$-n_\mu P^\mu \, dV \, d\Pi \, d\lambda_0 = \frac{-g \, d^4 x \, d^4 P}{(2\pi)^3} \Theta\left(P^0\right) \delta_{\mathrm{D}}\left(P_\mu P^\mu + m^2\right) \tag{6.29}$$

となる．

式 (6.27) で示されたように，8 次元位相空間の体積要素に含まれる粒子のアフィン・パラメータを一様に変化させるという操作に対して，不変体積要素 $-g \, d^4 x \, d^4 P$ の値は変化しない．さらに，粒子の運動に沿ってエネルギー P^0 の符号は変化せず，$P_\mu P^\mu$ も一定に保たれるので，式 (6.29) の右辺全体がこの操作によって不変である．さらに，この操作はすべての粒子のアフィン・パラメータを一様に変化させるので，8 次元位相空間体積要素を定義しているアフィン・パラメータ間隔 $d\lambda_0$ も不変に保たれる．したがって，左辺を $2/d\lambda_0$ 倍した

$$-2 n_\mu P^\mu dV \, d\Pi \tag{6.30}$$

は粒子の運動に沿って一定に保たれることがわかる．この性質のことを**リュービルの定理** (Liouville's theorem) という．3 次元体積要素 dV の静止系，すなわち n^μ を 4 元速度に持つ観測者の系では $n_\mu = -\delta^0_\mu$ となる．このとき，式 (6.6) を用いることにより，上式 (6.30) を P^0 で積分したものは

$$\frac{d^3 x \, d^3 P}{(2\pi)^3} \tag{6.31}$$

に等しい．これは 6 次元位相空間の体積要素である．リュービルの定理は，粒子群の占める 6 次元位相空間体積が運動によって一定に保たれる，ということを意味している．

6.2.2 ボルツマン方程式

運動量空間の微小体積要素 $d\Pi$ 中に含まれる粒子の 4 元流束は，式 (6.9) からわかるように，

$$dN^\mu = 2P^\mu f(x, P) d\Pi \tag{6.32}$$

となる．4 元流速の時間成分は粒子数密度であるから，微小体積 dV に垂直な時間的単位ベクトル n^μ の方向へ 4 元流束を射影すれば，その微小体積中の粒子数密度が得られる．したがって，6 次元位相空間の微小体積 $dV d\Pi$ 中に含まれる粒子数 dN は

$$dN = -n_\mu dN^\mu dV = f(x, P)\,(-2n_\mu P^\mu)\,dVd\Pi \tag{6.33}$$

で与えられる．粒子に固定された位相空間の微小体積が測地線に沿って動いていくとき，上式の右辺において分布関数 f を除く因子はリュービルの定理によって不変に保たれる．したがって，この微小体積中の粒子数の変化は

$$\begin{aligned}\delta(dN) = \delta f\,(-2n_\mu P^\mu)\,dVd\Pi &= \left(\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{\partial f}{\partial x^\mu} + \frac{dP^\mu}{d\lambda}\frac{\partial f}{\partial P^\mu}\right)\delta\lambda\,(-2n_\mu P^\mu)\,dVd\Pi \\ &= \left(P^\mu\frac{\partial f}{\partial x^\mu} - \Gamma^\mu_{\nu\lambda}P^\nu P^\lambda\frac{\partial f}{\partial P^\mu}\right)\delta\lambda\,(-2n_\mu P^\mu)\,dVd\Pi\end{aligned} \tag{6.34}$$

と計算される．ただし，最後の等式で測地線方程式 (6.18) を用いた．

上に計算した量 $\delta(dN)$ は，粒子の集団とともに運動する位相空間体積要素 $dVd\Pi$ の中に含まれている粒子数の増減を表している．重力以外の直接的な相互作用が働かない場合，すべての粒子が測地線方程式にしたがって運動するので，ここで考えている粒子数 dN は時間的に変化しない一定量である．このとき式 (6.34) はゼロになり，次の相対論的な**リュービル方程式** (Liouville equation)

$$P^\mu\frac{\partial f}{\partial x^\mu} - \Gamma^\mu_{\nu\lambda}P^\nu P^\lambda\frac{\partial f}{\partial P^\mu} = 0 \tag{6.35}$$

が得られる．この方程式は**ブラソフ方程式** (Vlasov equation) あるいは**無衝突ボルツマン方程式** (collisionless Boltzmann equation) とも呼ばれる．左辺の f に作用する演算子

$$L \equiv P^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} - \Gamma^\mu_{\nu\lambda}P^\nu P^\lambda\frac{\partial}{\partial P^\mu} \tag{6.36}$$

を**リュービル演算子** (Liouville operator) と呼ぶ．この演算子を用いてリュービル方程式は $L[f] = 0$ と表される．

上で定義されたリュービル演算子は 8 次元位相空間上で定義されてはいるが，質量殻の条件を満たす 7 次元部分空間に接する方向への微分演算子になっている．事実，8 次元位相空間において質量殻上の定数 $g_{\mu\nu}P^\mu P^\nu$ にリュービル演算子を作用させ，式 (1.123) を用いると，恒等的に

$$L\,[g_{\mu\nu}P^\mu P^\nu] = 0 \tag{6.37}$$

となることがわかる．すなわち，8 次元位相空間中においてリュービル演算子は質量を変化させる方向への微分成分を持っていない．すなわち，質量殻上に接する方向への微分演算子であることを意味する．

ここで，質量殻上に制限した7次元分布関数を $\tilde{f}(x^\mu, P^i)$ と表し，これに作用するリュービル演算子を考える．この7次元分布関数は，8次元分布関数 $f(x^\mu, P^\mu)$ に正エネルギーの質量殻条件を満たす式 (6.4) を代入して P^0 を消去した関数である．このとき，

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} + \frac{\partial P^0}{\partial x^\mu}\frac{\partial f}{\partial P^0}, \qquad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial P^i} = \frac{\partial f}{\partial P^i} + \frac{\partial P^0}{\partial P^i}\frac{\partial f}{\partial P^0} \tag{6.38}$$

が成り立つ．ここで，質量殻の条件式 (6.3) における P^0 を (x^μ, P^i) の従属変数であると考えて微分することにより，

$$\frac{\partial P^0}{\partial x^\mu} = -\frac{P^\nu P_\lambda}{P_0}\Gamma^\lambda_{\mu\nu}, \qquad \frac{\partial P^0}{\partial P^i} = -\frac{P_i}{P_0} \tag{6.39}$$

が導かれる．式 (6.39) を式 (6.38) に代入し，さらに式 (1.124) を用いれば，

$$P^\mu \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^\mu} - \Gamma^i_{\nu\lambda}P^\nu P^\lambda \frac{\partial \tilde{f}}{\partial P^i} = P^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} - \Gamma^\mu_{\nu\lambda}P^\nu P^\lambda \frac{\partial f}{\partial P^\mu} \tag{6.40}$$

となることが示される．質量殻の条件をはじめから満たしている7次元分布関数 $\tilde{f}$ は P^0 に依存しないため，$\partial\tilde{f}/\partial P^0 = 0$ となる．したがってリュービル演算子の形 (6.36) はそのままこの7次元分布関数にも適用できることがわかる．これは，リュービル演算子が質量殻の方向へ沿った微分であることを反映した性質である．

重力以外の直接的な相互作用が粒子に働く場合は dN が一定に保たれない．粒子の衝突や生成消滅反応などによって，位相空間体積要素に粒子が出入りすることになる．そこで，粒子の運動に沿ってアフィン・パラメータが $\delta\lambda$ だけ変化する間に，位相空間体積要素 $dVd\Pi$ 中の粒子数が

$$\delta(dN) = 2\mathscr{C}[f]\,(-n_\mu P^\mu)\,\delta\lambda\, dV d\Pi \tag{6.41}$$

だけ変化するものとする．ここで，アフィン・パラメータの変化あたりに，衝突などによってこの位相空間体積要素中の粒子数が増える率を量 $\mathscr{C}[f]$ によって現している．この量は位相空間の関数であると同時に，分布関数 f の全体にも依存する汎関数である．上式が式 (6.34) と等しくなる条件から，次の相対論的な**ボルツマン方程式** (Boltzmann equation)

$$P^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} - \Gamma^\mu_{\nu\lambda}P^\nu P^\lambda \frac{\partial f}{\partial P^\mu} = \mathscr{C}[f] \tag{6.42}$$

が得られる．右辺の $\mathscr{C}[f]$ はボルツマン方程式における衝突項と呼ばれ，粒子の相互作用の詳細に依存して定められる．リュービル演算子を用いてボルツマン方程式を簡略化して書けば $L[f] = \mathscr{C}[f]$ となる．質量殻の条件を代入した7次元分布関

数 $\tilde{f}(x^\mu, P^i)$ に対するボルツマン方程式は，式 (6.40) を式 (6.42) へ代入することにより，

$$P^\mu \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^\mu} - \Gamma^i_{\nu\lambda} P^\nu P^\lambda \frac{\partial \tilde{f}}{\partial P^i} = \mathscr{C}[\tilde{f}] \tag{6.43}$$

で与えられる．

式 (6.9) の粒子 4 元速度 N^μ および式 (6.17) のエネルギー運動量テンソル $T^{\mu\nu}$ の発散について，次の式

$$N^\mu{}_{;\mu} = 2\int d\Pi\, L[f] = 2\int d\Pi\, \mathscr{C}[f] \tag{6.44}$$

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 2\int d\Pi P^\mu L[f] = 2\int d\Pi\, P^\mu \mathscr{C}[f] \tag{6.45}$$

が成り立つ．両式ともに後半部分はボルツマン方程式から明らかである．前半部分は以下のように具体的な計算によって示される．まず，式 (6.9) の共変微分をとり，式 (1.123), (1.126) を用いて変形すると，

$$N^\mu{}_{;\mu} = N^\mu{}_{,\mu} + \Gamma^\mu_{\mu\nu} N^\nu = 2\int \frac{\sqrt{-g}\, d^4P}{(2\pi)^3} \theta(P^0) P^\mu \left[\delta_\mathrm{D}\left(P^2 + m^2\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x_\mu} + 2\Gamma^\nu_{\nu\mu} f\right) + 2\delta'_\mathrm{D}\left(P^2 + m^2\right)\Gamma^\lambda_{\mu\nu} P^\nu P_\lambda f\right] \tag{6.46}$$

が導かれる．ただし $P^2 = P_\mu P^\mu$ と略記した．ここで

$$\frac{\partial}{\partial P^\lambda}\delta_\mathrm{D}\left(P^2 + m^2\right) = 2P_\lambda\, \delta'_\mathrm{D}\left(P^2 + m^2\right) \tag{6.47}$$

となることを用いて積分の最後の項を部分積分すると，式 (6.44) の最初の等式が示される．式 (6.45) も同様の計算により示すことができる．

6.2.3 短距離相互作用による衝突項

ここでは，ボルツマン方程式における衝突項 $\mathscr{C}[f]$ の具体的な形を導出する．重力相互作用による分布関数の時間変化は，ボルツマン方程式の左辺 $L[f]$ に含まれている．衝突項 $\mathscr{C}[f]$ が記述するのは，粒子同士の直接的な相互作用による分布関数の変化である．

衝突項を求めるにあたり，重力だけが長距離力として作用し，また他の短距離力は瞬間的に作用するものとする．強い相互作用や弱い相互作用はきわめて短距離にしか働かないので，衝突過程においてこのことは十分に成り立つ．電磁気力は，なにも遮蔽するものがなければ長距離力になり得る．ところが，現実の宇宙は全体と

して電気的に中性であるため，長距離スケールでは遮蔽効果が働き，実質的に電磁相互作用も短距離力になる．重力だけは遮蔽されない力なので，必ず長距離力として作用する．

一般的に衝突項を導くため，場の量子論に基づいて粒子の相互作用を記述する．3.2 節で詳細に述べたように，粒子の種類はローレンツ群の表現によって分類され，粒子が持つ自由度はその種類ごとに異なる．ここで，異なる種類の粒子をまとめて表す記号を導入しておくと便利である．まず，相互作用に関係する粒子の生成消滅演算子を $a_r{}^\dagger(\boldsymbol{k}), a_r(\boldsymbol{k})$ とする．ただし，添字 r は粒子の種類と内部自由度をまとめて表しているものとする．たとえば，スカラー粒子，ヘリシティ $s = +1$ の電子，ヘリシティ $s = -1$ の電子，偏極 $\lambda = 1$ の光子，偏極 $\lambda = 2$ の光子，などはすべて異なる r に属する．また，$\boldsymbol{k}$ は波数ベクトルである．量子場の波数ベクトルは 3 次元運動量 $\boldsymbol{P}$ に対応する．

生成消滅演算子は，次の（反）交換関係

$$\left[a_r(\boldsymbol{k}), a_{r'}{}^\dagger(\boldsymbol{k}')\right]_\pm = \delta_{rr'}(2\pi)^3 2k^0 \delta_{\rm D}^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') \tag{6.48}$$

$$\left[a_r(\boldsymbol{k}), a_{r'}(\boldsymbol{k}')\right]_\pm = \left[a_r{}^\dagger(\boldsymbol{k}), a_{r'}{}^\dagger(\boldsymbol{k}')\right]_\pm = 0 \tag{6.49}$$

を満たすように定義された．ただし，反交換関係 $[a,b]_+ = ab + ba$ は 2 つともフェルミ粒子に対応する場合に適用し，そうでない場合は交換関係 $[a,b]_- = ab - ba$ を適用する．式 (6.48) の右辺では $k^0 = (|\boldsymbol{k}|^2 + m^2)^{1/2}$ とする．また，$\delta_{rr'}$ はクロネッカー・デルタ記号であり，粒子種と内部自由度がともに一致するとき値を 1 とし，そうでないとき値を 0 とする．

ここで，4.1.2 項の取り扱いと同様に，周期境界条件を課した有限体積 V によって波数空間を離散化する．このとき，式 (4.13), (4.14) で見たように，

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \leftrightarrow \frac{1}{V}\sum_{\boldsymbol{k}}, \quad \delta_{\rm D}^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') \leftrightarrow \frac{V}{(2\pi)^3}\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'} \tag{6.50}$$

と対応し，離散化された波数空間における演算子 $a_{r,\boldsymbol{k}}$ は

$$a_r(\boldsymbol{k}) \leftrightarrow \sqrt{2k^0V}a_{r,\boldsymbol{k}} \tag{6.51}$$

と対応する．このように離散化された自由度 $(r,\boldsymbol{k})$ を，以下ではまとめて離散的な添字 $i, j, \ldots$ で表す．すると，上に導入した生成消滅演算子は $a_{r,\boldsymbol{k}}{}^\dagger \to a_i{}^\dagger$, $a_{r,\boldsymbol{k}} \to a_i$ などと表される．ここで導入した添字 $i, j, \ldots$ は粒子種の違い，内部自由度の違い，および離散化された波数ベクトルの違いをすべて区別する．この簡略化された記法

で交換関係 (6.48), (6.49) は

$$\left[a_i, a_j{}^\dagger\right]_\pm = \delta_{ij} \tag{6.52}$$

$$\left[a_i, a_j\right]_\pm = \left[a_i{}^\dagger, a_j{}^\dagger\right]_\pm = 0 \tag{6.53}$$

と表される．ここで，δ_{ij} は粒子種，内部自由度，波数ベクトルがすべて一致したときのみ 1 となるクロネッカー・デルタ記号である．

式 (4.27) と同様に，状態 i にある粒子が n_i 個ずつ存在する状態ベクトルは

$$|n_1, n_2, \ldots\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1!n_2!\cdots}}\left(a_1{}^\dagger\right)^{n_1}\left(a_2{}^\dagger\right)^{n_2}\cdots|0\rangle \tag{6.54}$$

で与えられる．この状態ベクトルはノルムが 1 に規格化されている．粒子数の合計が有限（$\sum_i n_i < \infty$）となる上の状態ベクトル全体が，フォック空間の正規直交基底をなすのであった．状態ベクトルの式 (6.54) に生成演算子および消滅演算子を作用させると，（反）交換関係 (6.52), (6.53) を用いて導かれるように，

$$a_i\,|n_1, \ldots, n_i, \ldots\rangle = \sqrt{n_i}\,|n_1, \ldots, n_i - 1, \ldots\rangle \tag{6.55}$$

$$a_i{}^\dagger\,|n_1, \ldots, n_i, \ldots\rangle = \sqrt{1 \mp n_i}\,|n_1, \ldots, n_i + 1, \ldots\rangle \tag{6.56}$$

が成り立つ．ただし第 2 式では，上の符号がフェルミ粒子の場合，下の符号がボース粒子の場合に対応する．以下に現れる多重符号についても同様の約束とする．

いま，時空中に体積 V，時間間隔 T の領域 D を考え，この領域中で衝突過程 $i + j + \cdots \to k + l + \cdots$ が起きるものとする．領域 D の大きさは時空の曲率半径よりも十分小さいものとし，その内部で平坦時空の場の量子論が適用できるものとする．なおかつ，領域 D は衝突過程に要する時空領域よりは十分大きく，その中で漸近場を用いた散乱理論が適用できるものとする．便宜上，領域 D の体積 V を式 (6.50) で波数の離散化に用いた体積と同一視しておく．いま，始状態として多粒子系の状態ベクトル

$$|\alpha\rangle = \left|n_1, \ldots, n_i, \ldots, n_j, \ldots, n_k, \ldots, n_l, \ldots\right\rangle \tag{6.57}$$

をとる．このとき，衝突後の終状態は

$$|\beta\rangle = \left|n_1, \ldots, n_i - 1, \ldots, n_j - 1, \ldots, n_k + 1, \ldots, n_l + 1, \ldots\right\rangle \tag{6.58}$$

と表される．ただし，終状態の状態ベクトルも始状態（in 状態）の漸近場により表されているものとする．このとき，式 (4.103), (4.104) で定義される散乱行列要素

$$S_{\beta\alpha} = \langle \beta | S | \alpha \rangle \tag{6.59}$$

を用いると，衝突の遷移確率は $|S_{\beta\alpha}|^2$ で与えられる．

ここで，散乱行列演算子はダイソンの公式 (4.131) により与えられ，さらにウィックの定理を適用すると正規順序積の和に展開されるから，一般に連続表示において

$$\begin{aligned} S = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{1}{m!n!} \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3 2E_1} \cdots \frac{d^3k_m}{(2\pi)^3 2E_m} \frac{d^3k'_1}{(2\pi)^3 2E'_1} \cdots \frac{d^3k'_n}{(2\pi)^3 2E'_n} \\ \times W_{r'_1,\dots,r'_n|r_1,\dots,r_m}(\boldsymbol{k}'_1,\dots,\boldsymbol{k}'_n|\boldsymbol{k}_1,\dots,\boldsymbol{k}_m) \\ \times a_{r'_1}{}^{\dagger}(\boldsymbol{k}'_1)\cdots a_{r'_n}{}^{\dagger}(\boldsymbol{k}'_n) a_{r_1}(\boldsymbol{k}_1)\cdots a_{r_m}(\boldsymbol{k}_m) \end{aligned} \tag{6.60}$$

という形で与えられる．ここで，$E_i = k_i{}^0 = (|\boldsymbol{k}_i|^2 + m_i{}^2)^{1/2}$, $E'_i = k'_i{}^0 = (|\boldsymbol{k}'_i|^2 + m'_i{}^2)^{1/2}$ は相互作用を行う粒子のエネルギーに対応する量であり，積分測度はローレンツ不変になっている．積分核 $W_{r'_1,\dots,r'_n|r_1,\dots,r_m}$ の関数形は，相互作用ラグランジアンを与えれば一意的に定まる．上の式から散乱行列要素を作ることを考える．式 (6.60) の各項に現れる生成消滅演算子の数と種類が，左右から挟み込む生成消滅演算子に対応するときだけ生き残るので，

$$\begin{aligned} W_{r'_1,\dots,r'_n|r_1,\dots,r_m}(\boldsymbol{k}'_1,\dots,\boldsymbol{k}'_n|\boldsymbol{k}_1,\dots,\boldsymbol{k}_m) \\ = \Big\langle 0 \Big| a_{r'_1}(\boldsymbol{k}'_1)\cdots a_{r'_n}(\boldsymbol{k}'_n) S a_{r_1}{}^{\dagger}(\boldsymbol{k}_1)\cdots a_{r_m}{}^{\dagger}(\boldsymbol{k}_m) \Big| 0 \Big\rangle \end{aligned} \tag{6.61}$$

が成り立つ．すなわち，この積分核は式 (4.166), (4.167) のようにローレンツ不変規格化された散乱行列要素に等しい．

連続な波数空間で表示された式 (6.60) の散乱行列演算子の形を，離散化された波数空間の表示で書き表すと，式 (6.50), (6.51) の対応関係により，

$$S = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{1}{m!n!} \sum_{i_1,\dots,i_m} \sum_{j_1,\dots,j_n} w_{j_1,\dots,j_n|i_1,\dots,i_m} a_{j_1}{}^{\dagger} \cdots a_{j_n}{}^{\dagger} a_{i_1} \cdots a_{i_m} \tag{6.62}$$

という形になる．ただし，連続表示での自由度 $(r_1, \boldsymbol{k}_1)$, $(r'_1, \boldsymbol{k}'_1)$ などを，離散化した表示では i_1, j_1 などと書き表した．ここで係数 w は式 (6.60) の積分核 W の規格化を変えたもので，

$$\begin{aligned} W_{r'_1,\dots,r'_n|r_1,\dots,r_m}(\boldsymbol{k}'_1,\dots,\boldsymbol{k}'_n|\boldsymbol{k}_1,\dots,\boldsymbol{k}_m) \\ = (2V)^{(n+m)/2} \left(E_{i_1}\cdots E_{i_m} E_{j_1}\cdots E_{j_n}\right)^{1/2} w_{j_1,\dots,j_n|i_1,\dots,i_m} \end{aligned} \tag{6.63}$$

と対応する．さらに，式 (6.61) を離散化した変数で表せば，

$$w_{j_1,\ldots,j_n|i_1,\ldots,i_m} = \left\langle 0 \middle| a_{j_1} \cdots a_{j_n} S \, a_{i_1}{}^{\dagger} \cdots a_{i_m}{}^{\dagger} \middle| 0 \right\rangle \tag{6.64}$$

となる．つまり，$w_{j_1,\ldots,j_n|i_1,\ldots,i_m}$ は反応 $i_1 + \cdots + i_m \to j_1 + \cdots + j_m$ の散乱行列要素 $S_{i_1+\cdots+i_m \to j_1+\cdots+j_m}$ に等しい．

式 (6.57), (6.58), (6.62) を式 (6.59) に代入することで散乱行列要素の形が求まる．始状態と終状態に含まれる生成消滅演算子のうち，相互作用 $i + j + \cdots \to k + l + \cdots$ に関係するものが散乱演算子と対になるから，展開式 (6.62) の 1 つの項が散乱行列要素に寄与して，

$$\begin{aligned} S_{\beta\alpha} &= w_{k,l,\ldots|i,j,\ldots} \\ &\quad \times \left\langle n_i - 1, n_j - 1, \ldots, n_k + 1, n_l + 1, \ldots \middle| a_k{}^{\dagger} a_l{}^{\dagger} \cdots a_i a_j \cdots \middle| n_i, n_j, \ldots, n_k, n_l, \ldots \right\rangle \\ &= \left[n_i n_j \cdots (1 \mp n_k)(1 \mp n_l) \cdots \right]^{1/2} w_{k,l,\ldots|i,j,\ldots} \end{aligned} \tag{6.65}$$

が得られる．ここで，2 番めの等式では式 (6.55), (6.56) を用いた．領域 D 中での一度の衝突 $i + j + \cdots \to k + l + \cdots$ によって，始状態 $|\alpha\rangle$ から終状態 $|\beta\rangle$ へ遷移するときの遷移確率 $P_{\mathrm{D}}(\alpha \to \beta)$ は，上に求めた散乱行列要素に対する絶対値の 2 乗により与えられるので，

$$P_{\mathrm{D}}(\alpha \to \beta) = n_i n_j \cdots (1 \mp n_k)(1 \mp n_l) \cdots |w_{k,l,\ldots|i,j,\ldots}|^2 \tag{6.66}$$

となる．

上に得られた確率に初期状態の粒子数が係数として現れる理由は次のとおりである．まず，始状態の粒子数 $n_i, n_j, \ldots$ の各々に比例している理由は，最初に存在する粒子の数が多いほど，それに比例して反応の確率が増えるからである．一方，終状態の粒子数 $n_k, n_l, \ldots$ にも依存する係数が現れるのは，量子効果による．たとえば粒子 k がフェルミ粒子の場合，パウリの排他律が働き，同じ量子状態を複数の粒子で占めることはできないので，必ず $n_k = 0, 1$ となる．散乱前にすでに占められている量子状態 $n_k = 1$ に対しては，散乱後に粒子が生成される確率はゼロになる．一方，散乱前に占められていない量子状態 $n_k = 0$ にそのような制限はない．この 2 つの理由により因子 $1 - n_k$ が現れる．すなわち，この因子はパウリの排他律による粒子生成の阻害を表している．

一方，ボース粒子は同じ量子状態をいくつでも占めることができる．ボース粒子の場合，式 (6.66) の遷移確率が $1 + n_k$ などに比例するということは，最初に占められている量子状態へ散乱する確率が大きくなるという量子的な特徴を表してい

る．たとえば，光子はボース粒子であり，量子的な放射場におけるこの性質は，**誘導放射** (stimulated emission) としてよく知られる現象である．この現象は単一波長の電磁波を増幅するレーザーやメーザーの原理ともなっている．

式 (6.66) の確率に現れる粒子数への依存性を，分布関数によって表すことを考える．領域 D は局所ミンコフスキー時空で近似できるとしたので，運動量要素 $d\Pi$ は式 (6.6) で与えられる．さらに式 (6.50) と同様に運動量を離散化すると，

$$d\Pi \leftrightarrow \frac{1}{2EV} \tag{6.67}$$

となる．ただし $E = P^0$ は粒子のエネルギーである．式 (6.8) のように分布関数を運動量積分したものが粒子数密度を与えるから，領域 D に含まれる状態 i の粒子数密度 n_i/V は $2E_i f_i/(2E_i V) = f_i/V$ で与えられる．ここで f_i は，領域 D の時空点と状態 i の運動量を位相空間座標とする分布関数の値である．したがって領域 D 内にある状態 i の粒子について $n_i = f_i$ という関係にあることがわかる．式 (6.66) を分布関数で表すことにより，領域 D 内で反応 $i + j + \cdots \to k + l + \cdots$ が起きる確率は，

$$P_{\mathrm{D}}(i + j + \cdots \to k + l + \cdots) = f_i f_j \cdots (1 \mp f_k)(1 \mp f_l) \cdots |w_{k,l,\dots|i,j,\dots}|^2 \tag{6.68}$$

で与えられる．単一の領域 D にある粒子数 n_i は，それが古典的に決まった値を持っているとき整数である．だが，分布関数は量子状態の統計平均として定義されるので，上の式においては f_i が必ずしも整数である必要はない．

領域 D における一度の衝突過程による量子状態 a の粒子数変化を ΔN_a とする．その期待値 $\langle \Delta N_a \rangle$ は，終状態に a を含む反応の発生確率と，始状態に a を含む反応の発生確率との差で与えられ，

$$\langle \Delta N_a \rangle = \sum_{i,j,\cdots,k,l,\cdots} P_{\mathrm{D}}(i + j + \cdots \to a + k + l + \cdots) - \sum_{i,j,\cdots,k,l,\cdots} P_{\mathrm{D}}(a + k + l + \cdots \to i + j + \cdots) \tag{6.69}$$

と表される．ここで和記号は状態 $i, j, \dots, k, l, \dots$ がとり得る運動量や量子状態についての和を表す．

粒子のアフィン・パラメータが $\Delta\lambda$ だけ変化するとき，時空座標の変化は $\Delta x^\mu = P^\mu \Delta\lambda$ である．このことから，量子状態 a に対応する粒子のアフィン・パラメータ間隔は，そのエネルギー E_a により $\Delta\lambda = T/E_a$ で与えられる．ただし，領域 D の静止系において $\Delta\lambda$ に対応する時間間隔を T とした．また，衝突項を定義する式

(6.41) を，ここで考えている座標と記法で状態 a の粒子数変化に対して表すと，離散化の対応の式 (6.67) も用いて，

$$\langle \varDelta N_a \rangle = 2\mathscr{C}[f_a]\, E_a\, \varDelta\lambda\, V \frac{1}{2E_a V} = \mathscr{C}[f_a]\, \varDelta\lambda = \frac{T}{E_a}\mathscr{C}[f_a] \tag{6.70}$$

となる．式 (6.68)–(6.70) によって衝突項は

$$\mathscr{C}[f_a] = \frac{E_a}{T}\sum_{i,j,\dots,k,l,\dots}\Big[f_i f_j\cdots(1\mp f_a)(1\mp f_k)(1\mp f_l)\cdots\left|w_{a,k,l,\dots|i,j,\dots}\right|^2 - f_a f_k f_l\cdots(1\mp f_i)(1\mp f_j)\cdots\left|w_{i,j,\dots|a,k,l,\dots}\right|^2\Big] \tag{6.71}$$

と求められる．式 (6.50), (6.63) を用いて上の式を連続表示で表せば，

$$\mathscr{C}[f_a] = \frac{1}{2TV}\sum_{r_i,r_j,\dots,r_k,r_l,\dots}\int \frac{d^3P_i}{(2\pi)^3 2E_i}\frac{d^3P_j}{(2\pi)^3 2E_j}\cdots\frac{d^3P_k}{(2\pi)^3 2E_k}\frac{d^3P_l}{(2\pi)^3 2E_l}\cdots \times\Big[f_i f_j\cdots(1\mp f_a)(1\mp f_k)(1\mp f_l)\cdots\left|S_{i+j+\cdots\to a+k+l+\cdots}\right|^2 - f_a f_k f_l\cdots(1\mp f_i)(1\mp f_j)\cdots\left|S_{a+k+l+\cdots\to i+j+\cdots}\right|^2\Big] \tag{6.72}$$

となる．ここで最初の和記号は粒子の内部自由度 $r_i, \dots$ に関する和を表し，また $S_{i+j+\cdots\to k+l+\cdots}$ は反応 $i + j + \cdots \to k + l + \cdots$ における不変規格化された連続表示での散乱行列要素を表す．

ここで式 (4.176) により定義される不変散乱振幅 $\mathscr{M}$ を用いると，散乱行列要素の絶対値を 2 乗したものは式 (4.178) で与えられる．ここで用いている記法では，

$$\left|S_{i+j+\cdots\to k+l+\cdots}\right|^2 = TV(2\pi)^4\delta_{\mathrm{D}}^4(P_k + P_l + \cdots - P_i - P_j - \cdots)\left|\mathscr{M}_{i+j+\cdots\to k+l+\cdots}\right|^2 \tag{6.73}$$

と表される．ここで散乱行列要素が内部自由度について平均されているものとし，さらに統計平均された分布関数 f_i が内部自由度の変数に依存しない場合を考えれば，式 (6.72) の内部自由度に関する和記号は内部自由度の積 $g_i g_j \cdots g_k g_l \cdots$ で置き換えられる．これより以下ではそのような場合を考えることにし，

$$d\varPi_i = \frac{g_i\, d^3P_i}{(2\pi)^3 2E_i} \tag{6.74}$$

などの記号を導入する．ここで g_i は粒子 i の内部自由度を表す．この式 (6.74) の定義は，式 (6.2), (6.6) における不変運動量要素とは内部自由度の因子だけ異なるので注意する．式 (6.74) を一般座標において表せば，式 (6.2) の形に内部自由度の因子を付けることで，

$$d\Pi_i = \frac{g_i \sqrt{-g} d^4 P_i}{(2\pi)^3} \Theta\left(P_i{}^0\right) \delta_{\rm D}\left[(P_i)^2 + m_i{}^2\right] \tag{6.75}$$

となる．ただし m_i は粒子 i の質量である．

式 (6.73) に現れる 4 次元デルタ関数 $\delta_{\rm D}^4(P + \cdots)$ は 4 次元運動量の体積要素 d^4P をかけるとスカラー量になるから，それ自身は一般座標変換のもとでのスカラー量ではない．一般座標変換のもとで $\sqrt{-g}d^4P$ がスカラー量であるから，4 次元デルタ関数を $\sqrt{-g}$ で割ったものがスカラー量となる．

こうして，式 (6.72) の衝突項を一般座標で書き表せば，

$$\begin{aligned}\mathscr{C}[f_a] = \frac{1}{2} \int d\Pi_i d\Pi_j \cdots d\Pi_k d\Pi_l \cdots \frac{(2\pi)^4}{\sqrt{-g}} \delta_{\rm D}^4(P_a + P_k + P_l + \cdots - P_i - P_j - \cdots) \\ \times \Big[f_i f_j \cdots (1 \mp f_a)(1 \mp f_k)(1 \mp f_l) \cdots \left|\mathscr{M}_{i+j+\cdots \to a+k+l+\cdots}\right|^2 \\ - f_a f_k f_l \cdots (1 \mp f_i)(1 \mp f_j) \cdots \left|\mathscr{M}_{a+k+l+\cdots \to i+j+\cdots}\right|^2 \Big]\end{aligned} \tag{6.76}$$

という形で与えられる．相互作用ラグランジアン密度が与えられれば，その相互作用過程に対する不変散乱振幅 $\mathscr{M}$ が計算でき，さらに上の式により衝突項が求まる．分布関数 f_i, f_j などは領域 D における粒子の運動量分布を表しているため，これは領域 D の場所と時間にも依存する．すなわち時空座標 x^μ の関数でもあり，各粒子に対応する分布関数 $f(x, P)$ の値に等しい．

式 (6.74), (6.75) のように運動量要素に内部自由度を含める場合，不変散乱振幅としては反応前後の粒子に関する内部自由度についてすべて平均したものを用いることになる．もし運動量要素に内部自由度を含めたくない場合には，反応前後の粒子の内部自由度についてすべて和をとった不変散乱振幅を用いることになる．

一般的な衝突項の形は式 (6.76) で与えられるが，特別な場合には形が多少簡単化する．相互作用が時間反転対称性を持つときには，

$$|\mathscr{M}_{i+j+\cdots \to k+l+\cdots}|^2 = |\mathscr{M}_{k+l+\cdots \to i+j+\cdots}|^2 \tag{6.77}$$

が成り立つので，式 (6.76) の右辺に現れる 2 つの不変散乱振幅は等しくなる．また，密度が希薄な極限 $f_i \ll 1$ において量子統計は古典統計に帰着するため，フェルミ粒子の阻害因子 $1 - f_i$ やボース粒子の誘導因子 $1 + f_i$ の効果は無視できるようになり，$1 \mp f_i \simeq 1$ と近似できる．時間反転対称性と古典統計性が同時に成り立つ場合，衝突項の表式は

$$\mathscr{C}[f_a] = \frac{1}{2}\int d\Pi_i d\Pi_j \cdots d\Pi_k d\Pi_l \cdots \frac{(2\pi)^4}{\sqrt{-g}}\delta_{\mathrm{D}}^4(P_i + P_j + \cdots - P_a - P_k - P_l - \cdots)$$
$$\times (f_i f_j \cdots - f_a f_k f_l \cdots)\left|\mathscr{M}_{a+k+l+\cdots\to i+j+\cdots}\right|^2 \quad (6.78)$$

で与えられる．

6.2.4 一様等方宇宙におけるボルツマン方程式

以上に導かれた一般的なボルツマン方程式を，一様等方時空に応用してみる．この場合には，対称性により分布関数 $f(x, P)$ は空間座標 $\boldsymbol{x}$ に依存せず，また運動量 $\boldsymbol{P}$ の方向にも依存しない．すなわち，分布関数は運動量の絶対値 $|\boldsymbol{P}|$ と時刻 t だけに依存する 2 変数関数となる．運動量の絶対値とエネルギー E は

$$E^2 = |\boldsymbol{P}|^2 + m^2 \quad (6.79)$$

という関係にある．ここで式 (2.28) にあるように，運動量の絶対値は

$$|\boldsymbol{P}| = \sqrt{g_{ij}P^i P^j} = a\sqrt{\gamma_{ij}P^i P^j} \quad (6.80)$$

で与えられる．これらのことから，一様等方宇宙の分布関数はエネルギーと時間だけの関数 $f(E, t)$ とみなすことができる．ここで運動量の各成分 P^i は，エネルギー E を通じて分布関数へ陰に依存するが，陽には依存しない．このため，ボルツマン方程式 (6.42) において，分布関数を運動量 P^i で偏微分する項はゼロになる．

一様等方宇宙のクリストッフェル記号は式 (2.15), (2.16) で与えられる．これをボルツマン方程式 (6.42) の左辺に代入すると，

$$L[f] = E\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a}|\boldsymbol{P}|^2\frac{\partial f}{\partial E} = E\left(\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a}\frac{E^2 - m^2}{E}\frac{\partial f}{\partial E}\right) \quad (6.81)$$

となる．さらに，一様等方宇宙の衝突項 $\mathscr{C}[f]$ もエネルギー E と時間 t のみの関数となる．こうして，一様等方宇宙のボルツマン方程式は

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a}\frac{E^2 - m^2}{E}\frac{\partial f}{\partial E} = \frac{1}{E}\mathscr{C}[f] \quad (6.82)$$

で与えられる*1．

ちなみに，一様等方宇宙の分布関数を，エネルギー E でなく運動量の絶対値 $P = |\boldsymbol{P}| = a(\gamma_{ij}P^i P^j)^{1/2}$ の関数 $f(P, t)$ とみなし，一様等方宇宙のクリストッフェ

---

*1 文献によっては，この式の右辺を衝突項の定義とするものもある．

ル記号の式 (2.15), (2.16) をボルツマン方程式 (6.42) の左辺に代入すると,

$$L[f] = E\left(\frac{\partial f}{\partial t} - 2\,\frac{\dot{a}}{a}\,P^i\,\frac{\partial f}{\partial P^i}\right) \tag{6.83}$$

が得られる．ここで $P^i\partial/\partial P^i = P\partial/\partial P$ と置き換えると，式 (6.81) は $E^2 = P^2 + m^2$ と矛盾するように見えるが，このような操作は正しくない．なぜなら，P と P^i の関係が時間に依存しているため，偏微分で固定する独立変数が異なるからである．独立変数の変換 $(t, P^i) \to (t, P)$ の下で偏微分の変換を正しく求めると，

$$\frac{\partial}{\partial t} \to \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a}P\frac{\partial}{\partial P}, \quad P^i\frac{\partial}{\partial P^i} \to P\frac{\partial}{\partial P} \tag{6.84}$$

となる．すると式 (6.83) は

$$L[f] = E\left(\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a}\,P\frac{\partial f}{\partial P}\right) \tag{6.85}$$

と変形され，これは式 (6.81) において分布関数の独立変数を E から P へ変換したものと一致する．したがって，運動量の大きさ P を独立変数とする一様等方宇宙のボルツマン方程式は

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a}P\frac{\partial f}{\partial P} = \frac{\mathscr{C}[f]}{\sqrt{P^2 - m^2}} \tag{6.86}$$

となる．

各種の粒子数密度は重要な物理量である．一様等方宇宙において，粒子数密度と相対論的分布関数の関係式 (6.8) は

$$n(t) = 2\int d\Pi E f \tag{6.87}$$

となる．ただし，内部自由度について足し合わされた粒子数密度を考える場合には，式 (6.74) と同様に $d\Pi$ には内部自由度がかけ合わされているものとする．式 (6.9) で定義される粒子 4 元流速 N^μ は，特別な方向がない一様等方宇宙において空間成分がゼロになるので，$(N^\mu) = (n, \mathbf{0})$ で与えられる．一様等方宇宙のクリストッフェル記号の式 (2.15), (2.16) を用いて発散 $N^\mu{}_{;\mu}$ を求め，一般的な式 (6.44) に代入すると，粒子数密度の時間発展を記述する方程式

$$\frac{dn}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a}n = 2\int d\Pi\mathscr{C}[f] \tag{6.88}$$

が得られる．左辺第 2 項は，物理的体積あたりの粒子数密度が膨張により薄まる効果を表している．共動体積あたりの粒子数 na^3 は宇宙膨張により薄まることはない．実際，上の式を変形すると

$$\frac{d}{dt}\left(na^3\right) = 2a^3 \int d\Pi \mathscr{C}[f] \tag{6.89}$$

となる．この式の左辺は共動体積あたりの粒子数の変化を表し，右辺は反応によりその体積中で粒子が生成される割合を表す．衝突項がゼロであれば，共動体積あたりの粒子数 na^3 は一定に保たれる．

6.3 膨張宇宙における粒子の数密度進化

一様等方宇宙におけるボルツマン方程式の応用として，一般に生成消滅反応を行う粒子の数密度進化を考える．ある粒子種 A の数密度を n_A とし，その時間変化に着目する．この粒子は次の反応

$$A + i + j + \cdots \leftrightarrow k + l + \cdots \tag{6.90}$$

を通じてその粒子数を変化させるものとする．一様等方宇宙のボルツマン方程式 (6.88) および衝突項の式 (6.76) により，数密度 n_i の時間変化を記述する一般的な式は

$$\begin{aligned}\frac{dn_A}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a}n_A = \int & d\Pi_A d\Pi_i d\Pi_j \cdots d\Pi_k d\Pi_l \cdots \\ & \times (2\pi)^4 \delta_D^4(P_A + P_i + P_j + \cdots - P_k - P_l - \cdots) \\ & \times \Big[f_k f_l \cdots (1 \mp f_A)(1 \mp f_i)(1 \mp f_j) \cdots \left|\mathscr{M}_{k+l+\cdots \to A+i+j+\cdots}\right|^2 \\ & \qquad - f_A f_i f_j \cdots (1 \mp f_k)(1 \mp f_l) \cdots \left|\mathscr{M}_{A+i+j+\cdots \to k+l+\cdots}\right|^2 \Big]\end{aligned} \tag{6.91}$$

となる．ただし，粒子 A を生成消滅させる反応の種類が複数個ある場合には，右辺の衝突項はそれらすべての反応についての和となる．

6.3.1 中性子と陽子の数密度比

原始元素合成における中性子と陽子の数密度比を決める過程は，2.5.4 項で述べた．これを，ボルツマン方程式に基づく方法によって再考する．定性的な過程はすでに説明したので，ここではさらに定量的な予言をするための計算手法について述べる．中性子や陽子の生成消滅を伴う過程は，主として弱い相互作用による次の 3 つの反応

$$\mathrm{n} + \nu_\mathrm{e} \leftrightarrow \mathrm{p} + \mathrm{e}^-, \quad \mathrm{n} + \mathrm{e}^+ \leftrightarrow \mathrm{p} + \bar{\nu}_\mathrm{e}, \quad \mathrm{n} \leftrightarrow \mathrm{p} + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_\mathrm{e} \tag{6.92}$$

である．これらの反応は，始状態と終状態の粒子を入れ替えるとすべて同じファインマン図形で表される．このため，不変散乱振幅の絶対値 2 乗 $|\mathscr{M}|^2$ の値は共通である．そしてその値は 5.5.2 項において述べた V–A 理論によって計算できる．式 (6.92) の反応は，すべて相互作用ラグランジアン密度の式 (5.215) で記述される．ここから，4.6 節で述べた手法を用いて直線的な計算をすることにより，不変散乱振幅が求められる．その結果，スピン自由度の平均をとったものは，

$$|\mathscr{M}|^2 = 4{G_\mathrm{F}}^2\left(1 + 3{g_\mathrm{A}}^2\right)(P_\mathrm{n} \cdot P_\nu)(P_\mathrm{p} \cdot P_\mathrm{e}) \tag{6.93}$$

で与えられる．ここで $P_\mathrm{n} \cdot P_\nu$ などは 4 元運動量の 4 次元スカラー積を表す．

中性子の数密度に注目し，その進化を与える方程式 (6.91) を考える．中性子の生成消滅反応は，式 (6.92) の 3 種類あるので，式 (6.91) の右辺にはそれらすべての寄与を加える．ここで，反応過程 $A + i + j + \cdots \to k + l + \cdots$ に対する粒子 A の反応率を

$$\begin{aligned}\lambda(A + i + j + \cdots \to k + l + \cdots) \equiv \frac{1}{n_A}\int & d\Pi_A d\Pi_i d\Pi_j \cdots d\Pi_k d\Pi_l \cdots \\ & \times (2\pi)^4 \delta_\mathrm{D}^4(P_A + P_i + P_j + \cdots - P_k - P_l - \cdots) \\ & \times f_A f_i f_j \cdots (1 \mp f_k)(1 \mp f_l) \cdots \left|\mathscr{M}_{A+i+j+\cdots\to k+l+\cdots}\right|^2\end{aligned} \tag{6.94}$$

によって定義し，さらに

$$\lambda_\mathrm{np} \equiv \lambda(\mathrm{n} + \nu_\mathrm{e} \to \mathrm{p} + \mathrm{e}^-) + \lambda(\mathrm{n} + \mathrm{e}^+ \to \mathrm{p} + \bar{\nu}_\mathrm{e}) + \lambda(\mathrm{n} \to \mathrm{p} + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_\mathrm{e}) \tag{6.95}$$

$$\lambda_\mathrm{pn} \equiv \lambda(\mathrm{p} + \mathrm{e}^- \to \mathrm{n} + \nu_\mathrm{e}) + \lambda(\mathrm{p} + \bar{\nu}_\mathrm{e} \to \mathrm{n} + \mathrm{e}^+) + \lambda(\mathrm{p} + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_\mathrm{e} \to \mathrm{n}) \tag{6.96}$$

と定義する．このとき，中性子の数密度 n_n が満たす発展方程式は，式 (6.91) により，

$$\frac{dn_\mathrm{n}}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a}n_\mathrm{n} = \lambda_\mathrm{pn}n_\mathrm{p} - \lambda_\mathrm{np}n_\mathrm{n} \tag{6.97}$$

となる．ただし n_p は陽子の数密度である．

ここで，たとえば式 (6.95) の右辺第 1 項を具体的に書くと

$$\lambda(\mathrm{n}+\nu_\mathrm{e}\to\mathrm{p}+\mathrm{e}^-)=\frac{1}{n_\mathrm{n}}\int\frac{2d^3P_\mathrm{n}}{(2\pi)^3 2E_\mathrm{n}}\frac{d^3P_\nu}{(2\pi)^3 2E_\nu}\frac{2d^3P_\mathrm{p}}{(2\pi)^3 2E_\mathrm{p}}\frac{2d^3P_\mathrm{e}}{(2\pi)^3 2E_\mathrm{e}}$$
$$\times(2\pi)^4\delta_\mathrm{D}^4(P_\mathrm{n}+P_\nu-P_\mathrm{p}-P_\mathrm{e})f_\mathrm{n}f_\nu(1-f_\mathrm{p})(1-f_\mathrm{e})|\mathscr{M}|^2 \quad (6.98)$$

となる．元素合成に関係する時期では，中性子と陽子は十分に非相対論的である．このとき，近似的に $E_\mathrm{n}\simeq m_\mathrm{n}$, $E_\mathrm{p}\simeq m_\mathrm{p}$ および $P_\mathrm{n}\cdot P_\nu\simeq -m_\mathrm{n}E_\nu$, $P_\mathrm{p}\cdot P_\mathrm{e}\simeq -m_\mathrm{p}E_\mathrm{e}$ となる．ここで m_n, m_p はそれぞれ中性子と陽子の質量である．また陽子は古典統計にしたがい分布関数は十分小さいので，近似的に $1-f_\mathrm{p}\simeq 1$ としてよい．これらの近似により，式 (6.93) は

$$|\mathscr{M}|^2\simeq 4G_\mathrm{F}{}^2\left(1+3g_\mathrm{A}{}^2\right)m_\mathrm{n}m_\mathrm{p}E_\nu E_\mathrm{e} \quad (6.99)$$

となる．すると，式 (6.98) の被積分関数には陽子のエネルギー E_p が含まれなくなり，さらに陽子の 3 次元運動量 $\boldsymbol{P}_\mathrm{p}$ は 3 次元デルタ関数の部分にしか含まれなくなるので，その運動量積分は容易である．さらに中性子の運動量は積分要素の他に分布関数 f_n にしか現れないから，その運動量積分は中性子の数密度 n_n となり，最初の因子と打ち消し合う．その結果，

$$\lambda(\mathrm{n}+\nu_\mathrm{e}\to\mathrm{p}+\mathrm{e}^-)=\frac{1}{8\pi^3 m_\mathrm{n}m_\mathrm{p}}\int\frac{P_\nu{}^2dP_\nu}{E_\nu}\frac{P_\mathrm{e}{}^2dP_\mathrm{e}}{E_\mathrm{e}}\delta_\mathrm{D}(Q+E_\nu-E_\mathrm{e})f_\nu(1-f_\mathrm{e})|\mathscr{M}|^2 \quad (6.100)$$

が得られる．ただし，

$$Q=m_\mathrm{n}-m_\mathrm{p}=1.293\,\mathrm{MeV} \quad (6.101)$$

は中性子と陽子の質量差である．ここで質量殻の条件により $P_\nu{}^2dP_\nu=P_\nu E_\nu dE_\nu$, $P_\mathrm{e}{}^2dP_\mathrm{e}=P_\mathrm{e}E_\mathrm{e}dE_\mathrm{e}$ となる．式 (6.100) に不変散乱振幅の具体形 (6.99) を代入し，ニュートリノのエネルギー E_ν をデルタ関数と一緒に積分すると，

$$\lambda(\mathrm{n}+\nu_\mathrm{e}\to\mathrm{p}+\mathrm{e}^-)=A\int_{Q+m_\nu}^{\infty}dE_\mathrm{e}\,E_\mathrm{e}P_\mathrm{e}P_\nu(1-f_\mathrm{e})f_\nu \quad (E_\nu=E_\mathrm{e}-Q) \quad (6.102)$$

が得られる．ただし，$m_\nu=m_{\nu_\mathrm{e}}$ を電子ニュートリノの質量とし，

$$A\equiv\frac{G_\mathrm{F}{}^2\left(1+3g_\mathrm{A}{}^2\right)}{2\pi^3} \quad (6.103)$$

とおいた．また，電子の運動量の絶対値 P_e はエネルギー E_e により質量殻の条件

から決まる値 $P_e = (E_e{}^2 - m_e{}^2)^{1/2}$ である．さらにニュートリノの運動量の絶対値 P_ν も質量殻の条件により $P_\nu = (E_\nu{}^2 - m_\nu{}^2)^{1/2}$ で与えられる．積分範囲は，電子とニュートリノのエネルギーがそれぞれの質量より大きいという条件とエネルギー保存の関係による．また数値的に $m_e < Q + m_\nu$ であることを用いた．

上の同様の計算を繰り返すと，式 (6.95), (6.96) の右辺に現れる他の項の表式も得られ，その結果は

$$\lambda(\mathrm{n} + \mathrm{e}^+ \to \mathrm{p} + \bar{\nu}_\mathrm{e}) = A \int_{m_e}^{\infty} dE_e\, E_e P_e E_\nu P_\nu\, f_e (1 - f_\nu) \qquad (E_\nu = E_e + Q) \tag{6.104}$$

$$\lambda(\mathrm{n} \to \mathrm{p} + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_\mathrm{e}) = A \int_{m_e}^{Q - m_\nu} dE_e\, E_e P_e E_\nu P_\nu\, (1 - f_e)(1 - f_\nu) \qquad (E_\nu = Q - E_e) \tag{6.105}$$

および

$$\lambda(\mathrm{p} + \mathrm{e}^- \to \mathrm{n} + \nu_\mathrm{e}) = A \int_{Q + m_\nu}^{\infty} dE_e\, E_e P_e E_\nu P_\nu\, f_e (1 - f_\nu) \qquad (E_\nu = E_e - Q) \tag{6.106}$$

$$\lambda(\mathrm{p} + \bar{\nu}_\mathrm{e} \to \mathrm{n} + \mathrm{e}^+) = A \int_{m_e}^{\infty} dE_e\, E_e P_e E_\nu P_\nu\, (1 - f_e) f_\nu \qquad (E_\nu = E_e + Q) \tag{6.107}$$

$$\lambda(\mathrm{p} + \mathrm{e}^- + \bar{\nu}_\mathrm{e} \to \mathrm{n}) = A \int_{m_e}^{Q - m_\nu} dE_e\, E_e P_e E_\nu P_\nu\, f_e f_\nu \qquad (E_\nu = Q - E_e) \tag{6.108}$$

となる．

原始元素合成の時期には，ニュートリノと電子が完全な熱平衡状態になっているので，その分布関数は化学ポテンシャルのないフェルミ分布で与えられる．したがって，

$$f_e = \frac{1}{1 + e^{E_e/T}}, \qquad 1 - f_e = \frac{1}{1 + e^{-E_e/T}} \tag{6.109}$$

$$f_\nu = \frac{1}{1 + e^{E_\nu/T_\nu}}, \qquad 1 - f_\nu = \frac{1}{1 + e^{-E_\nu/T_\nu}} \tag{6.110}$$

となる．ただし，電子は電磁気力によって光子と強く結合しているので光子と同じ温度 T を持つが，ニュートリノは脱結合することにより光子とは異なる温度 T_ν を持ち得る．ニュートリノ脱結合後のニュートリノ温度 T_ν に対する漸近的な値は，光子温度との比として式 (2.166) に与えられている．

そこで式 (6.109), (6.110) を式 (6.102), (6.104)–(6.108) へ代入する．式 (6.102), (6.105), (6.106), (6.108) については $E_e = -q$, 式 (6.104), (6.107) については $E_e = q$ と変数変換し，積分範囲に注意して式 (6.95), (6.96) の和をまとめると，

$$\lambda_{\rm np} = A\int_{-\infty}^{\infty} dq\,\Theta(|q| - m_{\rm e})\,\Theta(|q+Q| - m_\nu) \times \frac{q^2(q+Q)^2\sqrt{(1-m_{\rm e}{}^2/q^2)[1-m_\nu{}^2/(q+Q)^2]}}{(1+e^{q/T})\left[1+e^{-(q+Q)/T_\nu}\right]} \tag{6.111}$$

$$\lambda_{\rm pn} = A\int_{-\infty}^{\infty} dq\,\Theta(|q| - m_{\rm e})\,\Theta(|q+Q| - m_\nu) \times \frac{q^2(q+Q)^2\sqrt{(1-m_{\rm e}{}^2/q^2)[1-m_\nu{}^2/(q+Q)^2]}}{(1+e^{-q/T})\left[1+e^{(q+Q)/T_\nu}\right]} \tag{6.112}$$

が得られる．ただし $\Theta(x)$ は階段関数であり，積分中で階段関数の引数が負になる領域は積分範囲に含まれない．ここで数値的に $Q \gg m_\nu$ が成り立つので，上の積分ではニュートリノの質量を無視する近似が十分に正確である．この近似では，式 (6.111), (6.112) が

$$\lambda_{\rm np} = A\int_{-\infty}^{\infty} dq\,\Theta(|q| - m_{\rm e})\,\frac{q^2(q+Q)^2\sqrt{1-m_{\rm e}{}^2/q^2}}{(1+e^{q/T})\left[1+e^{-(q+Q)/T_\nu}\right]} \tag{6.113}$$

$$\lambda_{\rm pn} = A\int_{-\infty}^{\infty} dq\,\Theta(|q| - m_{\rm e})\,\frac{q^2(q+Q)^2\sqrt{1-m_{\rm e}{}^2/q^2}}{(1+e^{-q/T})\left[1+e^{(q+Q)/T_\nu}\right]} \tag{6.114}$$

と簡単化する．温度 T, T_ν が与えられるとき，上の積分を数値的に行うことにより，微分方程式 (6.97) の係数が数値的に求まる．ここで，中性子の存在比を表す量

$$X_{\rm n} = \frac{n_{\rm n}}{n_{\rm n} + n_{\rm p}} \tag{6.115}$$

を定義する．共動体積あたりのバリオン量は変化しないので，分母 $n_{\rm n} + n_{\rm p}$ の時間変化が $\propto a^{-3}$ となることに注意すると，式 (6.97) は

$$\frac{dX_{\rm n}}{dt} = \lambda_{\rm pn}(1 - X_{\rm n}) - \lambda_{\rm np}X_{\rm n} \tag{6.116}$$

と書き換えられる．ここで，放射優勢期の式 (2.138), (2.139) を用いると時間 t の微分を温度 T の微分で表すことができ，

$$\frac{d}{dt} = \dot{T}\frac{d}{dT} = -\sqrt{\frac{4\pi^3 g_*}{45}}\,\frac{T^3}{m_{\rm Pl}}\left(1 + \frac{1}{3}\frac{d\ln g_{*S}}{d\ln T}\right)\frac{d}{dT} \tag{6.117}$$

となる．こうして，方程式 (6.116) を温度について数値的に積分することができる．

定数 A の値は中性子の崩壊寿命と関係している．温度がゼロの極限 $(T, T_\nu \to 0)$ を考えると，式 (6.109)，(6.110) により $f_e, f_\nu \to 0$ となるので，式 (6.102)，(6.104)–(6.108) のうち，式 (6.105) 以外はすべてゼロになり，反応率としては $\lambda(n \to p + e^- + \bar{\nu}_e)$ だけが生き残る．この反応は，孤立した中性子が不安定であるために自然に崩壊する過程を表している．温度がゼロであるときのその反応率を $\lambda^0_{np} = \lambda(n \to p + e^- + \bar{\nu}_e)|_{T=0}$ とおけば，この極限で式 (6.116) は $dX_n/dt = -\lambda^0_{np} X_n$ となり，その解は $X_n \propto \exp(-\lambda^0_{np} t)$ で与えられる．したがって λ^0_{np} は中性子の崩壊率に等しく，中性子の平均寿命は $\tau_n = 1/\lambda^0_{np}$ で与えられる．温度ゼロの極限をとった式 (6.105) により，$Q \gg m_\nu$ の近似で λ^0_{np} の具体的な表式は，

$$\begin{aligned}\lambda^0_{np} &= A \int_{m_e}^{Q} dq\, q^2 (q-Q)^2 \sqrt{1 - \frac{{m_e}^2}{q^2}} = A{m_e}^5 \int_1^R dx\, x^2 (x-R)^2 \sqrt{1-x^{-2}} \\ &= A{m_e}^5 \left[\left(\frac{R^4}{30} - \frac{3R^2}{20} - \frac{2}{15}\right)\sqrt{R^2-1} + \frac{R}{4}\ln\left(R + \sqrt{R^2-1}\right)\right] \\ &\simeq 1.636 A{m_e}^5 \end{aligned} \tag{6.118}$$

と計算される．ただし，$R = Q/m_e \simeq 2.531$ である．したがって，定数 A は中性子の平均寿命 τ_n を用いて数値的に

$$A \simeq \frac{1}{1.636 {m_e}^5 \tau_n} \simeq 1.155 \times 10^{-8} \left(\frac{\tau_n}{\text{sec}}\right)^{-1} \ \text{GeV}^{-4} \tag{6.119}$$

で与えられる．ここに中性子の平均寿命の実験値 $\tau_n \simeq 880.0\,\text{sec}$ を代入すると

$$A \simeq 1.312 \times 10^{-11}\ \text{GeV}^{-4} \tag{6.120}$$

が得られる．ちなみに，この値を式 (6.103) と比較すると核子の擬ベクトル結合定数の値が見積もられて，

$$g_A = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{2\pi^3 A}{{G_F}^2} - 1} \simeq 1.289 \tag{6.121}$$

となる．

式 (6.116) の解は数値的に求めることができるが，ここで近似的な解析解を導いておく．まず，初期の高温時期では $T \gg Q$ が成り立つ．ニュートリノの脱結合温度 $\simeq 1.5\,\text{MeV}$ は $Q = 1.293\,\text{MeV}$ の値に近く，このとき $T \simeq T_\nu$ としてよい．この極限で，式 (6.113)，(6.114) は同じ漸近形

$$\lambda_{\rm np} \simeq \lambda_{\rm pn} \simeq A\int_{-\infty}^{\infty}\frac{q^4dq}{(1+e^{q/T})(1+e^{-q/T})} = \frac{7\pi^4}{15}AT^5 \tag{6.122}$$

となる．このとき式 (6.116) は明らかな解 $X_{\rm n} = 1/2$ を持つ．これは中性子と陽子の数が同数であることを意味する．

次に，温度が下がって $T \gg Q$ の条件が満たされなくなるとする．この時期にはニュートリノも脱結合し始めるが，近似的に $T \simeq T_\nu$ として解析解を求めてみる．このとき恒等式

$$\frac{(1+e^{q/T})[1+e^{-(q+Q)/T}]}{(1+e^{-q/T})[1+e^{(q+Q)/T}]} = e^{-Q/T} \tag{6.123}$$

と式 (6.113), (6.114) により

$$\lambda_{\rm pn} = e^{-Q/T}\lambda_{\rm np} \tag{6.124}$$

となる．すると式 (6.116) は

$$\frac{dX_{\rm n}}{dt} = \lambda_{\rm np}\left[e^{-Q/T}(1-X_{\rm n}) - X_{\rm n}\right] \tag{6.125}$$

という形になる．温度が十分高い極限では，反応率 $\lambda_{\rm np}$ が十分に大きい．中性子比 $X_{\rm n}$ は 1 を超えられないので，この極限でも式 (6.125) の右辺は有限にとどまる必要がある．したがって右辺で $\lambda_{\rm np}$ にかかる因子が十分に小さくなる必要がある．これをゼロにする近似解は

$$X_{\rm n} \simeq \frac{1}{1+e^{Q/T}} \tag{6.126}$$

で与えられる．この解は，化学平衡条件が満たされる場合の近似式 (2.173) による中性子比に一致する．さらに高温の極限 $Q/T \to 0$ をとれば，上の結果と一致して $X_{\rm n} = 1/2$ となる．温度が下がるにつれて徐々に $X_{\rm n}$ の値は小さくなっていく．ただし，温度が十分に下がって反応率が小さくなると，平衡近似解である式 (6.126) は成り立たない．

光子温度 T の関数として，中性子比 $X_{\rm n}(T)$ の変化を図 6.2 に示す．実線が微分方程式 (6.125) の数値積分により得られる解を表している．破線は式 (6.126) の平衡近似解 $X_{\rm n}^{\rm EQ}$ を表し，また点線はガモフの基準に基づいて求めた脱結合後の近似解 (2.174) を表す．高温側は平衡近似解とよく一致する．また，ガモフの基準による方法はおおまかなものにもかかわらず，低温側でかなりよい近似を与えていることがわかる．温度 T は宇宙時間とともに下がっていくため，中性子比は右から左へ向かって時間進化する．

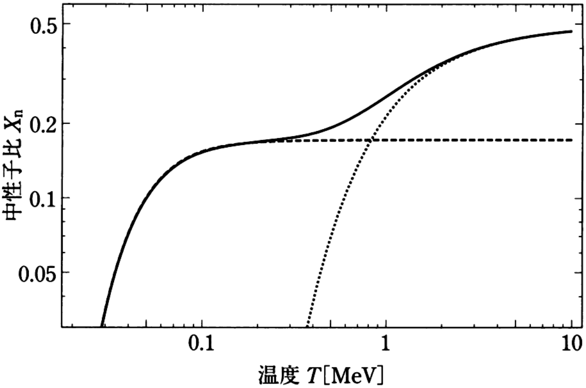


図 6.2 中性子比 X_n と光子温度 T の関係．ただし $T \lesssim 0.07$ MeV で起きる元素合成の効果は考慮していない．実線は数値解，破線は平衡近似解，点線は脱結合後の近似解をそれぞれ表す．

温度が 1 MeV より下がると平衡状態から脱して，中性子比がガモフの基準による値 $X_n^{EQ}(0.82\,\text{MeV})$ にいったん固定される．さらに 0.1 MeV 程度以降になると，中性子の崩壊により数が減っていく．ただし，この図には元素合成の効果は含まれていない．実際には 0.07 MeV 程度の温度において元素合成が進み，このとき中性子の多くはヘリウム 4 原子核に取り込まれる．図 2.6 に見られるように，この元素合成の時点で自由な中性子の数が急激に減る（図 2.6 の横軸は右ほど低温であることに注意）．

6.3.2 粒子数密度の近似的な進化

次に，宇宙論的な粒子数密度の進化を調べる上で，有用な近似的取扱い方法を与えておく．いま，古典統計が成り立ち，分布関数に含まれる ±1 の因子が無視できる場合を考える．そして 2 体反応の相互作用

$$A + i \leftrightarrow j + k \tag{6.127}$$

を考える．この相互作用は時間反転について対称であるとし，その不変散乱振幅を $|\mathscr{M}|^2$ とする．このとき，ボルツマン方程式の衝突項は式 (6.78) で与えられ，粒子数密度の発展方程式 (6.91) は

$$\frac{dn_A}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a}n_A = \int d\Pi_A d\Pi_i d\Pi_j \cdots d\Pi_k (2\pi)^4 \delta_D^4(P_A + P_i - P_j - P_k) \times (f_k f_l - f_A f_i)|\mathscr{M}|^2 \quad (6.128)$$

となる．さらに，各粒子は運動学的な平衡状態にあるものとする．この場合，分布関数は式 (2.112) の形で与えられる．このとき粒子数を変化させる式 (6.127) の反応について化学平衡状態である必要はない．他の散乱過程などが十分な頻度で起きると運動学的な平衡状態が達成されるが，この場合でも化学ポテンシャル μ の和が反応の前後で等しいとは限らない．つまりこの場合の μ は任意の時間の関数とみなされる．古典統計が成り立つと仮定したので，この近似のもとで粒子の分布関数はすべて

$$f = e^{\mu/T}e^{-E/T} \quad (6.129)$$

という形になる．ここで粒子数を

$$n = e^{\mu/T}n^{\mathrm{EQ}} \quad (6.130)$$

とおくと，上の分布関数の形により，

$$n^{\mathrm{EQ}} = \int \frac{g\,d^3P}{(2\pi)^3}e^{-E/T} = \frac{gT^3}{2\pi^2}\int_0^\infty dx\,x^{1/2}\left(x + \frac{2m}{T}\right)^{1/2}\left(x + \frac{m}{T}\right)e^{-x-m/T} \quad (6.131)$$

$$= \frac{gm^2T}{2\pi^2}K_2\left(\frac{m}{T}\right) \simeq \begin{cases} g\left(\dfrac{mT}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-m/T} & (m \gg T) \\ \dfrac{gT^3}{\pi^2} & (m \ll T) \end{cases} \quad (6.132)$$

となる．ただし g はこの粒子の内部自由度である．2 番めの等式では $E = (P^2 + m^2)^{1/2}$ であることと変数変換 $x = (E - m)/T$ を用いて積分を書き直した．また $K_n(x)$ は式 (B.31) に与えられる第 2 種ベッセル関数である．

各粒子についての分布関数が式 (6.129) の形で与えられる場合，衝突項の分布関数に依存する部分は

$$f_k f_l - f_A f_i = \left[e^{(\mu_j+\mu_k)/T} - e^{(\mu_A+\mu_i)/T}\right]e^{-(E_A+E_i)/T} \quad (6.133)$$

となる．ただし，エネルギー保存の関係 $E_A + E_i = E_j + E_k$ を用いた．これを (6.128) へ代入して，さらに式 (6.130) と同様に定義される n_A^{EQ}, n_i^{EQ} などを用いれば，

$$\frac{dn_A}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a}n_A = -\langle\sigma v\rangle\left(n_A n_i - \frac{n_A^{\rm EQ} n_i^{\rm EQ}}{n_k^{\rm EQ} n_l^{\rm EQ}} n_k n_l\right) \tag{6.134}$$

が得られる．ただし，

$$\langle\sigma v\rangle \equiv \frac{1}{n_A^{\rm EQ} n_i^{\rm EQ}} \int \frac{g_A d^3P_A}{(2\pi)^3 2E_A}\frac{g_i d^3P_i}{(2\pi)^3 2E_i}\frac{g_j d^3P_j}{(2\pi)^3 2E_j}\frac{g_k d^3P_k}{(2\pi)^3 2E_k} \times (2\pi)^3\delta_{\rm D}^3(\boldsymbol{P}_A + \boldsymbol{P}_i - \boldsymbol{P}_j - \boldsymbol{P}_k)\, 2\pi\delta_{\rm D}(E_A + E_i - E_j - E_k) \times |\mathscr{M}|^2\, e^{-(E_A+E_i)/T} \tag{6.135}$$

と定義した．この量 $\langle\sigma v\rangle$ は熱平均された生成消滅反応の断面積と解釈される．ここで粒子 A の生成消滅を伴う反応が複数種類ある場合は，式 (6.134) の右辺にそのような反応すべてからの寄与が足し合わされる．

粒子 A が粒子 i と相互作用して生成消滅をする反応率は平均的に $\Gamma \sim n_i\langle\sigma v\rangle$ で与えられる．これが宇宙の膨張率よりも十分小さく $\Gamma \ll H$ となっている場合，式 (6.134) において各粒子の n と $n^{\rm EQ}$ は同じオーダーの量であるから，左辺第 2 項よりも右辺が十分小さくなる．すなわち粒子数がほぼ $n_A \propto a^{-3}$ と変化する．すなわち，生成消滅反応が起こらなくなり，宇宙膨張によって粒子数密度が薄められていく．一方，$\Gamma \gg H$ の場合，右辺で $\langle\sigma v\rangle$ にかかる因子は十分小さい必要があるから，

$$\frac{n_A n_i}{n_A^{\rm EQ} n_i^{\rm EQ}} \simeq \frac{n_j n_k}{n_j^{\rm EQ} n_k^{\rm EQ}} \tag{6.136}$$

となる．すると各粒子に対する式 (6.130) と同様の関係式より $\mu_A + \mu_i \simeq \mu_j + \mu_k$ となる．すなわち，このときには十分な生成消滅反応により粒子数について化学平衡が成り立っている．

上に得られた粒子数の進化を記述する微分方程式 (6.134) は，宇宙論においてさまざまに応用される．以下ではその典型的な例を述べる．

6.3.3 水素原子と電子の再結合過程

初期宇宙の進化の中で電子が水素原子に再結合する過程は，2.5.5 項に述べた．ここではこの過程を再考し，電子の数密度の進化をボルツマン方程式の方法で記述する．考える反応過程は

$$p + e \leftrightarrow H + \gamma \tag{6.137}$$

である．ヘリウム原子は水素原子よりも大きな電離エネルギーを持ち電離しにくいので，水素原子よりも先に再結合する．このため水素原子が再結合する時期までには，ヘリウム原子はほとんど中性になっている．そこで，電離した原子は水素原子だけであるものと近似する．宇宙は全体として電気的に中性なので，自由電子の数密度 n_e と電離した水素原子核の数 n_p は等しく $n_e = n_p$ が成り立つ．光子は化学ポテンシャルがゼロであり，完全な熱平衡分布となるため $n_\gamma = n_\gamma^{EQ}$ が成り立つ．自由電子の数密度に着目すると，式 (6.134) はこの場合，

$$\frac{dn_e}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a}n_e = -\langle\sigma v\rangle\left(n_e{}^2 - \frac{n_e^{EQ}n_p^{EQ}}{n_H^{EQ}}n_H\right) \tag{6.138}$$

となる．2.5.5 項で述べたように，電子と水素原子が再結合する時期の温度は，水素の電離エネルギーに対応する温度よりも十分低く，光子も古典統計にしたがう粒子と考えられる．

再結合の時期には，光子以外の各粒子がすべて非相対論的になっているので，式 (6.132) における $m \gg T$ の近似が適用できる．したがって

$$\frac{n_e^{EQ}n_p^{EQ}}{n_H^{EQ}} = \left(\frac{m_e T}{2\pi}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{I_H}{T}\right) \tag{6.139}$$

となる．ここで各粒子の自由度が $g_e = g_p = 2, g_H = 4$ であることと，質量について $m_H \simeq m_p$ が成り立つことを用いた．また $I_H \simeq 13.59\,\mathrm{eV}$ は，式 (2.187) に与えられた水素原子の電離エネルギーの値である．ここで水素原子核の数密度 $n_{tot} = n_p + n_H = n_e + n_H$ を用いて電離率を

$$X_e = \frac{n_e}{n_{tot}} \tag{6.140}$$

で定義する．反応式 (6.137) において水素原子核の総数は変化しないから，$n_{tot}a^3$ は時間的に一定である．そこで $n_e = n_{tot}X_e$ を式 (6.138) へ代入し，さらに式 (6.139) を用いると，

$$\frac{dX_e}{dt} = -\langle\sigma v\rangle\left[n_{tot}X_e{}^2 - \left(\frac{m_e T}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-I_H/T}(1 - X_e)\right] \tag{6.141}$$

が得られる．再結合時の時期までには相対論的粒子の有効自由度が固定されて変

化しなくなるので $T \propto a^{-1}$ が成り立ち，したがって $dT/dt = -HT$ となる．ここで $H = \dot{a}/a$ は膨張率を表すハッブル・パラメータである．したがって時間微分は

$$\frac{d}{dt} = \frac{dT}{dt}\frac{d}{dT} = -HT\frac{d}{dT} \tag{6.142}$$

と温度微分で表すことができる．ハッブル・パラメータ H はフリードマン方程式に等価な式 (2.80) と $a = T_0/T$ により温度の関数 $H(T)$ として表される．ここで T_0 は式 (2.137) に与えられる現在の宇宙マイクロ波背景放射の温度である．こうして式 (6.141) は温度に関する常微分方程式となる．

この微分方程式を数値的に解くためには，熱平均された再結合の断面積 $\langle\sigma v\rangle$ を温度の関数として具体的に表す必要がある．自由電子が直接的に基底状態の水素原子として再結合する過程は，この断面積にほとんど寄与しない．なぜなら，基底状態へ再結合するときに放出される光子がちょうど水素の電離エネルギー I_{H} を持っているので，付近にある中性水素原子をただちに電離してしまうからである．すると，数の上からは実質的に再結合が起こらないのと同じことになってしまう．

そこで電子はいったん水素原子の励起状態に再結合し，その後光子を放出して基底状態に落ち着くという過程をとる．この過程にはすべての励起状態が寄与し得るため実際には複雑である．基底状態を除き，主量子数が 2 以上の励起状態へ再結合する熱平均断面積 $\langle\sigma v\rangle$ に対応する量は $\alpha^{(2)}$ という記号で表される．温度に依存する $\alpha^{(2)}$ の値を求めることは通常の量子力学的問題であり，数値計算を用いて具体的な値が得られる．数値的な計算結果は近似的に

$$\alpha^{(2)} = 9.78\frac{\alpha^2}{m_{\mathrm{e}}{}^2}\left(\frac{I_H}{T}\right)^{1/2}\ln\left(\frac{I_H}{T}\right) \tag{6.143}$$

で表される*2．ただし $\alpha \simeq 1/137$ は微細構造定数である．この近似式 (6.143) を式 (6.141) における $\langle\sigma v\rangle$ へ代入して数値的に積分すれば，水素再結合の近似的な時間変化が得られる．

数値積分の結果は，図 6.3 の破線のようになる．宇宙論パラメータの値には，付録 A.4 の観測値を用い，水素原子の総数については，$Y_{\mathrm{P}} = 0.25$ により $n_{\mathrm{tot}}(T) = n_{\mathrm{tot}}(T_0)/a^3 = a^{-3}(1 - Y_{\mathrm{P}})\rho_{\mathrm{c}0}\Omega_{\mathrm{b}0}/m_{\mathrm{H}}$ と見積もった．この図には，2.5.5 項においてサハの式による平衡近似で求めた電離率が点線で与えられている．この図を見ると，数値積分の結果は $z \gtrsim 1100$ で平衡近似とよく一致していることがわかる．そ

*2 S. Dodelson, *Modern Cosmology* (Academic Press, 2003), p.71．もう少し複雑な近似式は D. Péquignot, P. Petitjean and C. Boisson, *Astron. Astrophys.*, **251**, 680 (1991) に与えられているが，$100\,\mathrm{K} < T < 10^4\,\mathrm{K}$ の範囲で式 (6.143) との違いは 2% 程度以下である．

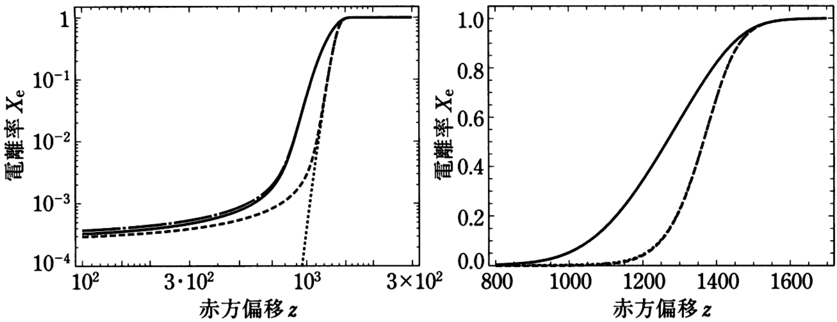


図 6.3 水素の電離率の変化を赤方偏移の関数として表したもの．点線は平衡近似，破線は 1 段階近似，鎖線は 3 段階近似（ピーブルス・モデル）にそれぞれ対応する．また，実線は他の励起状態の効果を現象論的に入れた 3 段階近似．左右の図は軸が異なるが同じ関数を表している．右図では平衡近似と 1 段階近似の線が重なっており，3 段階近似の線も重なっている．宇宙論パラメータの値には，付録 A.4 の観測値を用いた．

れ以降は電離水素の数が減って自由電子の再結合が起こりにくくなるため，平衡条件が破れて自由電子の数がほぼ固定される．この図にある鎖線や実線は，ここで考えている簡単な近似を改良したものである．これらについて次に説明する．

6.3.4 ピーブルス・モデル

上に与えた近似的な再結合過程の取り扱いでは，再結合した後に励起状態から基底状態へ遷移する過程が無視されている．実際には，水素原子の遷移で放出される光子が，他の水素原子の再結合に影響し，この取り扱いはあまり正確ではない．水素原子の励起状態について，すべての状態間の遷移過程を考えると非常に複雑になる．そこで，主な励起状態だけを考えることでこの効果を近似的に取り入れることを考える．具体的には，水素原子の基底状態 $1s$ と 2 つの励起状態 $2s$, $2p$ だけを考えることにする．これを**水素原子の 3 段階近似** (three-level approximation of the hydrogen atom) という（図 6.4）．この近似に基づく宇宙論的な水素再結合過程のモデルを**ピーブルス・モデル** (Peebles model) という*3．以下では，このピーブルス・モデルに基づいて結合過程を記述する微分方程式を導く．

上述のように，自由電子が水素原子の基底状態へ直接再結合すると，そこから放出された光子のほとんどは，すぐに基底状態にある他の水素原子を電離する．このため，数の上からは実質的に再結合が起こらなかったのと同じことになる．したが

*3 P. J. E. Peebles, *Astrophys. J.*, **153**, 1 (1968).

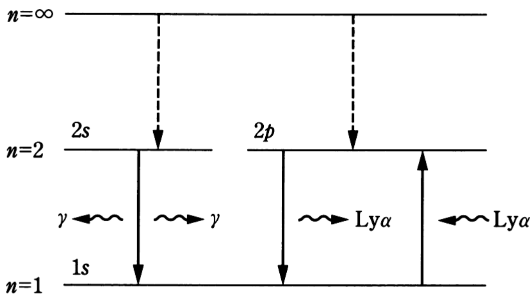


図 6.4　水素原子の 3 段階近似.

ってそのような再結合過程は無視できる．そこで，主量子数 $n \geq 2$ の励起状態へ再結合する反応

$$\mathrm{p} + \mathrm{e} \leftrightarrow \mathrm{H}(n \geq 2) + \gamma \tag{6.144}$$

を考える．この過程によって電子が水素原子の励起状態へ再結合すると，$n > 2$ の状態はすぐに光子を放出して $n = 2$ の状態へ遷移する．

この励起状態 $n = 2$ のうち，軌道角運動量の値が 1 である $2p$ 状態は，ライマン・アルファ線（Lyα, 波長 121.6 nm）に対応する光子を 1 つ放出して基底状態 $1s$ へ遷移することができる．すなわち

$$\mathrm{H}(2p) \leftrightarrow \mathrm{H}(1s) + \gamma(\mathrm{Ly}\alpha) \tag{6.145}$$

という反応によって基底状態の水素原子が形成される．ところが，この遷移で放出されたライマン・アルファ線が他の水素原子に吸収されてしまうと，上の反応式 (6.145) の左向きの過程により，再び励起状態 $2p$ の水素原子ができる．このときにはやはり，数の上からは実質的に遷移が起こらなかったのと同じことになる．ライマン・アルファ線が他の水素原子に吸収されずに十分長く生き残ると，宇宙膨張による赤方偏移によって波長が伸ばされ，他の中性水素を励起できなくなる．したがって，実質的に $2p \to 1s$ 遷移を起こす水素原子の数は，このようにして十分長く生き残ったライマン・アルファ線の光子数と等しい．

一方で，軌道角運動量の値が 0 である $2s$ 状態から光子を 1 つだけ放出して基底状態へ遷移する過程は，対称性によって禁止されている．基底状態 $1s$ への遷移には 2 つの光子の放出を伴い，

$$\mathrm{H}(2s) \leftrightarrow \mathrm{H}(1s) + \gamma + \gamma \tag{6.146}$$

という反応によって基底状態の水素原子が形成される．ここで放出される光子のエネルギーは，ライマン・アルファ線のエネルギーよりも小さいため，他の中性水素を基底状態から励起させることはない．

以上に挙げた 3 つの過程に基づいて，自由電子に対する数密度の発展方程式を導出する．いま考えている近似において，自由電子の数は反応式 (6.144) のみによって変化する．そして $n \geq 2$ の励起状態はただちに $n = 2$ へ遷移する．ここで $n = 2$ の励起状態にある水素原子の数密度を n_2 とすると，式 (6.138) と同様の式

$$\frac{dn_\mathrm{e}}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a}n_\mathrm{e} = -\alpha^{(2)}\left({n_\mathrm{e}}^2 - \frac{n_\mathrm{e}^\mathrm{EQ} n_\mathrm{p}^\mathrm{EQ}}{n_2^\mathrm{EQ}} n_2\right) \tag{6.147}$$

が成り立つ．ここで，電子 e と陽子 p はどちらもスピン自由度 2 を内部自由度として持つ．励起状態 $n = 2$ の水素原子は，電子と陽子のスピン自由度に加えて軌道自由度 4 を持つから，その内部自由度の合計は $4 \times 2 \times 2 = 16$ である．そこで，式 (6.132) における非相対論的な近似を適用すると，

$$\frac{n_\mathrm{e}^\mathrm{EQ} n_\mathrm{p}^\mathrm{EQ}}{n_2^\mathrm{EQ}} = \frac{1}{4}\left(\frac{m_\mathrm{e}T}{2\pi}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{B_2}{T}\right) \tag{6.148}$$

が得られる．ただし $B_n = I_\mathrm{H}/n^2$ は主量子数が n の励起状態に対応する水素原子の束縛エネルギーを表し，とくに $B_2 = I_\mathrm{H}/4$ である．ここで励起状態 $2s$ と $2p$ にある水素原子の数密度をそれぞれ n_{2s}, n_{2p} とする．水素原子は背景に大量に存在する光子と相互作用しているため，電子の配置には等分配則が働き，励起状態の水素原子数比 $n_{2s} : n_{2p}$ は軌道自由度の比 1 : 3 に等しい．したがって

$$n_2 = n_{2s} + n_{2p} = 4n_{2s} \tag{6.149}$$

が成り立つ．そこで

$$\beta^{(2)} \equiv \alpha^{(2)}\left(\frac{m_\mathrm{e}T}{2\pi}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{B_2}{T}\right) \tag{6.150}$$

とおくと，式 (6.147) は

$$\frac{1}{a^3}\frac{d(n_\mathrm{e}a^3)}{dt} = -\alpha^{(2)}{n_\mathrm{e}}^2 + \beta^{(2)}n_{2s} \tag{6.151}$$

と書き表される．

上の式 (6.151) だけでは，n_{2s} が与えられていないため閉じた方程式になっていない．そこで次に，励起状態 $n=2$ から基底状態 $n=1$ への遷移過程を考察する．この遷移を行った電子だけが，最終的に陽子と再結合することになる．上述のように，反応式 (6.145) の過程で基底状態へ遷移する実質的な水素原子の数は，遷移で放出されたライマン・アルファ線が他の水素原子に吸収されない数に等しい．そこで光子の分布関数 $f(E,t)$ を考えて，一様等方宇宙におけるボルツマン方程式 (6.82) を適用すると，

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} E \frac{\partial f}{\partial E} = \frac{\mathscr{C}[f]}{E} \tag{6.152}$$

となる．ここで $\mathscr{C}[f]$ は反応式 (6.145) に対応する衝突項とする．ライマン・アルファ線に対応するエネルギーは

$$E_\alpha = B_1 - B_2 = \frac{3}{4} I_{\mathrm{H}} = 10.19\,\mathrm{eV} \tag{6.153}$$

である．再結合時期の水素原子は十分に非相対論的であるため，放出されるライマン・アルファ線の線幅 $\varDelta E$ は非常に狭く，典型的に $\varDelta E/E_\alpha \sim 10^{-5}$ 程度となる．ライマン・アルファ線に対応するエネルギー範囲として下限を $E_- = E_\alpha - \varDelta E/2$，上限を $E_+ = E_\alpha + \varDelta E/2$ とする．このとき，基底状態の水素原子を $2p$ 状態へ励起させることのできるライマン・アルファ線光子の数密度は，光子の自由度が 2 であることを考慮して，

$$n_\alpha = \int_{\varDelta E} \frac{2d^3P}{(2\pi)^3} f(E) = \frac{1}{\pi^2} \int_{E_-}^{E_+} dE\, E^2 f(E) \tag{6.154}$$

で与えられる．

そこで式 (6.152) の両辺に E^2 をかけてからこの線幅の範囲で積分し，さらに左辺第 2 項を部分積分することにより，

$$\frac{1}{a^3} \frac{d(n_\alpha a^3)}{dt} = \frac{1}{\pi^2} \frac{\dot{a}}{a} \left[{E_+}^3 f(E_+) - {E_-}^3 f(E_-) \right] + R \tag{6.155}$$

が得られる．ここで

$$R = \frac{1}{\pi^2} \int_{E_-}^{E+} dE\, E\, \mathscr{C}[f] \tag{6.156}$$

は，反応式 (6.145) で放出されるライマン・アルファ線光子の実質的な増加率を与える量である．式 (6.155) の右辺第 1 項は，宇宙膨張による赤方偏移によって高エ

ネルギー側からライマン・アルファ線の線幅へ入ってくる光子と，低エネルギー側へ出て行く光子の寄与を表している．ここでライマン・アルファ線光子の数 n_α は $f(E_-)E^2\Delta E$ 程度であるのに対し，式 (6.155) 右辺第 1 項の角括弧内にある各項はそれより $E/\Delta E \sim 10^5$ ほども大きい．この項では $E_+ \simeq E_- \simeq E_\alpha$ と近似できるが，$f(E_+)$ と $f(E_-)$ にはライマン・アルファ線の放出によるギャップがあるため左辺のようには小さくならない．そこで左辺を無視する近似によりそのギャップを求めると，

$$f(E_-) - f(E_+) = \frac{\pi^2 R}{H{E_\alpha}^3} \tag{6.157}$$

となる．このギャップの存在は，再結合によって放出されたライマン・アルファ光子が赤方偏移によって低エネルギー側へ逃げていくことを表している．この式で $f(E_+)$ には再結合時に放出されたライマン・アルファ線が含まれていないので，熱平衡分布関数 $f(E_+) = e^{-E_\alpha/T}$ で置き換えることができる．一方で $f(E_-)$ には放出されたライマン・アルファ線の影響が含まれているので，ライマン・アルファ線の線幅上における分布関数の値とみなされる．そこで $f(E_-) = f_\alpha$ と書くことにすると，

$$R = \frac{H{E_\alpha}^3}{\pi^2}\left(f_\alpha - e^{-E_\alpha/T}\right) \tag{6.158}$$

が得られる．この量は，実質的に放出されるライマン・アルファ線の共動体積あたりの増加率であり，吸収分は差し引かれている．さらにこの量は $2p \to 1s$ 遷移を起こす実質的な水素原子の数に等しい．したがって，共動体積あたりの $2p$ 状態水素原子の変化率は

$$\frac{1}{a^3}\left.\frac{d(n_{2p}a^3)}{dt}\right|_{2p\to 1s} = -R \tag{6.159}$$

で与えられる．ただし，左辺の時間微分は基底状態へ遷移する変化だけの寄与であり，他の励起状態へ遷移したり電離したりする寄与は含まない．

ここでライマン・アルファ線上での分布関数 f_α は $2s$ 状態と $1s$ 状態にある水素原子数の比に等しく，

$$f_\alpha = \frac{n_{2s}}{n_{1s}} \tag{6.160}$$

となっている．なぜなら，ライマン・アルファ線の線幅の中では E_+ における温度 T よりも少し高い温度 T' で近似的な平衡状態になっていると考えられ，このとき

$f_\alpha = e^{-E_\alpha/T'} = e^{-(B_2-B_1)/T'} = n_{2s}/n_{1s}$ となるからである．ここで

$$\Gamma_\alpha \equiv \frac{HE_\alpha{}^3}{\pi^2 n_{1s}} \tag{6.161}$$

とおけば，式 (6.158)-(6.160) により

$$\left.\frac{1}{a^3}\frac{d(n_{2p}a^3)}{dt}\right|_{2p\to 1s} = -\Gamma_\alpha\left(n_{2s} - e^{-E_\alpha/T}n_{1s}\right) \tag{6.162}$$

が得られる．

最後に反応式 (6.146) によって基底状態へ遷移する過程を考える．ここで放出される光子は，基底状態にある他の水素原子を励起させることはできないため，そのまま背景に大量に存在する光子の中へ埋もれていく．このためライマン・アルファ線で考察したような複雑さはない．この反応について式 (6.134) を適用すれば，

$$\left.\frac{1}{a^3}\frac{d(n_{2s}a^3)}{dt}\right|_{2s\to 1s} = -\Gamma_{2\gamma}\left(n_{2s} - \frac{n_{2s}^{\rm EQ}}{n_{1s}^{\rm EQ}(n_\gamma^{\rm EQ})^2}n_{1s}(n_{\gamma_1})^2\right) \tag{6.163}$$

が得られる．ここで

$$\Gamma_{2\gamma} = 8.22458\ {\rm sec}^{-1} \tag{6.164}$$

は $2s \to 1s$ 遷移の崩壊率である．式 (6.163) に $n_{2s}^{\rm EQ}/n_{1s}^{\rm EQ} = e^{-E_\alpha/T}$, $n_\gamma^{\rm EQ} = n_\gamma$ を代入すると，

$$\left.\frac{1}{a^3}\frac{d(n_{2s}a^3)}{dt}\right|_{2s\to 1s} = -\Gamma_{2\gamma}\left(n_{2s} - e^{-E_\alpha/T}n_{1s}\right) \tag{6.165}$$

となる．

基底状態への直接的な再結合がないことから，実質的に再結合が起きる水素原子数の増加率は，式 (6.162) と式 (6.165) を加えて逆符号にしたもので与えられる．この増加率は自由電子の減少率に等しいから，式 (6.151) を逆符号にしたものと等しい．したがって，

$$\alpha^{(2)}n_{\rm e}{}^2 - \beta^{(2)}n_{2s} = (\Gamma_\alpha + \Gamma_{2\gamma})\left(n_{2s} - e^{-E_\alpha/T}n_{1s}\right) \tag{6.166}$$

という式が成り立つ．この式を n_{2s} について解き，それを式 (6.151) へ代入することにより，

$$\frac{1}{a^3}\frac{d(n_e a^3)}{dt} = \frac{\Gamma_\alpha + \Gamma_{2\gamma}}{\Gamma_\alpha + \Gamma_{2\gamma} + \beta^{(2)}}\left(-\alpha^{(2)}{n_e}^2 + \beta^{(2)}e^{-E_\alpha/T}n_{1s}\right) \tag{6.167}$$

という方程式が得られる．この方程式の右辺には n_{1s} が含まれているので，まだ方程式は閉じていない．式 (6.161) で定義される Γ_α にも n_{1s} が含まれている．

水素の再結合過程で興味ある温度は $T < 4500\,\mathrm{K} \simeq 0.4\,\mathrm{eV}$ であるから，指数因子は $e^{-E_\alpha/T} \lesssim 10^{-12} \ll 1$ と非常に小さい値になる．いま完全な熱平衡は達成されていないにしても，おおまかな関係として $n_{2s} = n_{2p}/3 \sim e^{-E_\alpha/T}n_{1s}$ となるので，非常によい近似で $n_{2s}, n_{2p} \ll n_{1s}$ となる．すると，すべての水素原子核を合わせた全数密度 $n_{\mathrm{tot}} = n_{\mathrm{p}} + n_{1s} + n_{2s} + n_{2p}$ においては n_{2s}, n_{2p} の寄与が無視できるため，

$$n_{1s} = n_{\mathrm{tot}} - n_e \tag{6.168}$$

がよい近似で成り立つ．ただし，宇宙全体が電気的に中性であることから $n_{\mathrm{p}} = n_e$ を代入した．水素原子核の全数密度 n_{tot} は元素合成の計算などから得られる定数値であり，上の式 (6.168) を用いることにより式 (6.167) が n_e の微分方程式として閉じたものになる．ここで水素の電離率を

$$X_e = \frac{n_e}{n_{\mathrm{tot}}} \tag{6.169}$$

で定義する．水素原子核の総数は保存するので $n_{\mathrm{tot}}a^3$ は時間的に一定である．すると式 (6.167) は

$$\frac{dX_e}{dt} = -\frac{\Gamma_\alpha + \Gamma_{2\gamma}}{\Gamma_\alpha + \Gamma_{2\gamma} + \beta^{(2)}}\alpha^{(2)}\left[n_{\mathrm{tot}}X_e - \left(\frac{m_e T}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-I_{\mathrm{H}}/T}(1 - X_e)\right] \tag{6.170}$$

と変形できる．ただし，

$$\Gamma_\alpha = \frac{H{E_\alpha}^3}{\pi^2 n_{\mathrm{tot}}(1 - X_e)} \tag{6.171}$$

である．

式 (6.170) が，ピーブルス・モデルにおける水素原子の再結合を記述する微分方程式である．ここで右辺最後の角括弧の中は，準位間の遷移を考えない素朴な式 (6.141) のものと完全に同じ形をしている．ピーブルス・モデルでは，この素朴な式の右辺全体に補正因子をかけただけの簡単な形となっている．最近では，他の励起状態間の複雑な遷移を考慮して巨大な連立微分方程式を立て，より正確に再結合過程を数値計算によって求めることも行われている．そうして得られた結果も，簡単なピーブルス・モデルの予言と大きくは異ならない．さらにピーブルス・モデ

ルに対して，式 (6.143) で近似される $\alpha^{(2)}$ の値を現象論的に 1.14 倍して用いると，より正確な数値計算の結果に近い値を再現できることが知られている*4（このとき $\beta^{(2)}$ も $\alpha^{(2)}$ に比例するので結果的に 1.14 倍される）.

図 6.3 には，ピーブルス・モデルによる数値計算の結果が示されている．鎖線は微分方程式 (6.170) を数値積分したもので，実線は上記の因子 1.14 を用いて他の励起状態の効果を現象論的に取り入れたものである．遷移放射の効果によって，再結合の時期は 1 段階近似よりも少し遅くなることがわかる．

6.3.5 ダークマターの存在量

現在の宇宙に存在する質量全体を観測と矛盾なく説明しようとすると，素粒子の標準モデルに含まれる既知の粒子だけでは不足することが知られている．現在の宇宙には，非相対論的に振る舞う未知の粒子が満ちあふれていると考えられている．この未知の質量成分を**ダークマター** (dark matter) という．ダークマターの正体はいまだに不明である．素粒子の標準モデルを拡張する理論は新しい粒子を予言することが一般的であるため，そうした粒子により説明する試みが多数提案されていて，いろいろな候補が考えられている．ここでは不確定要素の強い具体的な理論モデルには言及せず，一般的な仮定に基づいてその存在量を予言する枠組みについて説明する．

初期の宇宙では直接的な相互作用が可能な粒子も，宇宙の温度や密度が下がるとそうした相互作用を行うことができなくなり，実質的に重力相互作用しかしなくなるであろう．このような状態にある粒子のことを宇宙の**残存粒子** (relic particle) という．現在の宇宙に十分な量の非相対論的な残存粒子があれば，それはダークマターとして振る舞う．そこで，ダークマターとなり得る粒子の候補を絞るためには，このような残存粒子の量を求めることが重要になる．

ダークマターの候補になり得る未知の粒子 χ とその反粒子 $\bar{\chi}$ を想定する．この粒子は初期宇宙において次の反応

$$\chi + \bar{\chi} \leftrightarrow \mathrm{X} + \bar{\mathrm{X}} \tag{6.172}$$

を通じて生成消滅するものと仮定する．ここで X はダークマター粒子 χ と生成消滅反応を起こすことのできるあらゆる粒子の種類を代表的に表し，$\bar{\mathrm{X}}$ はその反粒

*4 S. Seager, D. D. Sasselov and D. Scott, *Astrophys. J.*, **523**, L1 (1999); W. Y. Wong, A. Moss and D. Scott, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **386**, 1023 (2008).

子とする．簡単のため，ダークマター粒子を生み出すこれらすべての粒子 X, $\bar{\text{X}}$ は化学ポテンシャルがゼロの完全な熱平衡分布になっているものと仮定する．式 (6.130) との対応では，この仮定の下で粒子 X, $\bar{\text{X}}$ の数密度はともに

$$n_{\text{X}} = n_{\bar{\text{X}}} = n_{\text{X}}^{\text{EQ}} \tag{6.173}$$

で与えられる．ダークマター粒子 $\chi, \bar{\chi}$ については，それらの行う相互作用が弱ければ，熱平衡分布をしていなくてもよい．ダークマター粒子 χ とその反粒子 $\bar{\chi}$ の間に完全な対称性が成り立つと仮定すれば，それらの粒子数密度は共通の値 $n_\chi = n_{\bar{\chi}}$ となる．

以上の仮定のもとで，ダークマター粒子の数密度 n_χ に対する進化は，式 (6.134), (6.173) により，

$$\frac{dn_\chi}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a}n_\chi = -\langle\sigma_{\text{A}}v\rangle\left[{n_\chi}^2 - \left(n_\chi^{\text{EQ}}\right)^2\right] \tag{6.174}$$

という方程式で記述される．ただし量 $\langle\sigma_{\text{A}}v\rangle$ は，ダークマター粒子の生成消滅反応に対する熱平均された全反応断面積である．ここで m をダークマター粒子 χ の質量，T を光子温度，s を宇宙全体のエントロピー密度とするとき，

$$x \equiv \frac{m}{T}, \quad Y \equiv \frac{n_\chi}{s}, \quad Y_{\text{EQ}} \equiv \frac{n_\chi^{\text{EQ}}}{s} \tag{6.175}$$

という変数を導入する．変数 x は時間とともに増大する無次元量となり，Y はエントロピーあたりのダークマター粒子数である．エントロピー密度は式 (2.133) により x の関数として

$$s = \frac{2\pi^2}{45}\frac{m^3 g_{*S}}{x^3} \tag{6.176}$$

で与えられる．エントロピー保存により sa^3 は時間的に一定なので，式 (6.174) の左辺は

$$\frac{dn_\chi}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a}n_\chi = \frac{1}{a^3}\frac{d}{dt}\left(n_\chi a^3\right) = \frac{1}{a^3}\frac{d}{dt}\left(Ysa^3\right) = s\frac{dY}{dt} \tag{6.177}$$

と表される．

ここで，有効自由度 g_*, g_{*S} が近似的に一定値となる場合を考える．すると，式 (2.136) により $T \propto a^{-1}$ となるので $\dot{T}/T = -H(x)$ が成り立つ．ここで $H(x)$ はハッブル・パラメータを x の関数として表したもので，式 (2.138) に $T = m/x$ を代入した式

$$H = \sqrt{\frac{4\pi^3 g_*}{45}} \frac{m^2}{m_{\rm Pl} x^2} \tag{6.178}$$

で与えられる．ただし粒子の生成消滅反応は放射優勢期に起きているものとする．このとき $d/dt = (dx/dt)d/dx = xHd/dx$ となるので，方程式 (6.174) は

$$\frac{dY}{dx} = -\frac{s}{xH}\langle\sigma_{\rm A} v\rangle \left[Y^2 - {Y_{\rm EQ}}^2\right] \tag{6.179}$$

と変形できる．ここに式 (6.176), (6.177) を代入することにより

$$\frac{dY}{dx} = -\sqrt{\frac{\pi}{45}} \frac{g_{*S}}{\sqrt{g_*}} m_{\rm Pl} m \frac{\langle\sigma_{\rm A} v\rangle}{x^2} \left[Y^2 - {Y_{\rm EQ}}^2\right] \tag{6.180}$$

という微分方程式が得られる．熱平均された生成消滅反応の断面積 $\langle\sigma_{\rm A} v\rangle$ が温度の関数として表されれば，上の微分方程式を数値的に積分してダークマター粒子の数の変化が計算できる．初期の十分に高温な宇宙でダークマター粒子が熱平衡状態となっているならば，微分方程式の境界条件は $x \to 0$ に対して $Y \to Y^{\rm EQ}$ で与えられる．

ここで消滅反応率 $\Gamma_{\rm A} = n_\chi^{\rm EQ}\langle\sigma_{\rm A} v\rangle$ を用いて式 (6.179) を変形すると，

$$\frac{x}{Y_{\rm EQ}}\frac{dY}{dx} = -\frac{\Gamma_{\rm A}}{H}\left[\left(\frac{Y}{Y_{\rm EQ}}\right)^2 - 1\right] \tag{6.181}$$

が得られる．この形は物理的な意味がわかりやすい．十分に高温な初期宇宙では消滅反応率が大きく $\Gamma_{\rm A}/H \gg 1$ となるとする．このとき，左辺はそれほど大きくなれないので $Y \simeq Y^{\rm EQ}$ である．温度が十分下がると $\Gamma_{\rm A}/H \ll 1$ となり，共動体積あたりのダークマター粒子数が変化しなくなる．このことをダークマター粒子数の**凍結** (freeze in) という．ここで $\Gamma_{\rm A} = H$ となる x の値を $x_{\rm f}$ とすると，これは粒子数が凍結する時期をおおまかに与える．凍結以前は平衡状態にあり，凍結後は共動体積あたりの粒子数が固定されるから，近似的に $x \lesssim x_{\rm f}$ に対して $Y(x) \simeq Y_{\rm EQ}(x)$ となり，$x \gtrsim x_{\rm f}$ に対して $Y(x) \simeq Y_{\rm EQ}(x_{\rm f})$ となる．

熱い残存粒子

粒子数の凍結時に残存粒子が相対論的な場合を考える．このような粒子は**熱い残存粒子** (hot relics) と呼ばれる．熱い残存粒子がダークマターの正体であるとする

理論モデルは**ホット・ダークマター・モデル** (hot dark matter model) と呼ばれ，しばしば HDM と略される．式 (2.125) により，相対論的粒子の数密度は T^3 に比例するから，平衡状態におけるエントロピーあたりの数密度 Y_{EQ} はほぼ一定である．近似的に粒子数凍結時の値 Y_{EQ} が凍結後に引き継がれると考えられるから，粒子数が凍結した後の Y の最終的な値は，式 (2.125), (2.133) により，

$$Y(\infty) = Y_{\mathrm{EQ}}(x_{\mathrm{f}}) = \frac{45\zeta(3)}{2\pi^4}\frac{g_{\mathrm{eff}}}{g_{*S}(x_{\mathrm{f}})} \tag{6.182}$$

と近似できる．ただし内部自由度 g を持つダークマター粒子がボース粒子のとき $g_{\mathrm{eff}} = g$ と定義し，フェルミ粒子のとき $g_{\mathrm{eff}} = 3g/4$ と定義する．また，$Y(\infty)$ は $x \to \infty$ に対する $Y(x)$ の値とする．ダークマター粒子は現在時刻までに非相対論的になるべきなので，現在時刻の質量密度は $\rho_\chi = ms_0Y(\infty)$ と見積もられる．ただし s_0 は現在のエントロピー密度であり，式 (2.145) で与えられる．これを密度パラメータの値にすれば，

$$\Omega_{\chi 0} = \frac{8\pi G}{3{H_0}^2}ms_0Y(\infty) = \frac{8\zeta(3)G}{3\pi}\frac{g_{*S0}\,{T_0}^3}{{H_0}^2}\frac{g_{\mathrm{eff}}}{g_{*S}(x_{\mathrm{f}})}m \tag{6.183}$$

$$= 7.675 \times 10^{-2}\,h^{-2}\frac{g_{\mathrm{eff}}}{g_{*S}(x_{\mathrm{f}})}\left(\frac{m}{1\,\mathrm{eV}}\right) \tag{6.184}$$

となる．上の値には反粒子の寄与が入っていない．反粒子の寄与も含めた密度パラメータは $\Omega_{\chi\bar{\chi}0} = 2\Omega_{\chi 0}$ で与えられる．

現在の宇宙における残存粒子の質量は，宇宙の全質量からバリオン質量を差し引いたものよりも小さくなければならない．すなわち $\Omega_{\chi\bar{\chi}0} < \Omega_{\mathrm{m0}} - \Omega_{\mathrm{b0}} \simeq 0.12\,h^{-2}$ という制限がある．実際には，宇宙の大規模構造などの最近の観測解析により，熱い残存粒子は主要なダークマター成分になり得ないことが明らかになっている．したがってこの制限は十分に満たされる必要がある．このことから

$$m \ll \frac{g_{*S}(x_{\mathrm{f}})}{g_{\mathrm{eff}}}\,\mathrm{eV} \tag{6.185}$$

という強い不等式が得られる．たとえば，ニュートリノは宇宙に実際に存在する粒子の中で，熱い残存粒子の典型的な例である．1 世代あたりのニュートリノの有効自由度は $g_{\mathrm{eff}} = 2 \times 3/4 = 1.5$ であり，また式 (2.159) にあるように $g_{*S}(x_{\mathrm{f}}) = 10.75$ である．このことから式 (6.185) はニュートリノの質量 m_ν に対する制限

$$m_\nu \ll 10\,\mathrm{eV} \tag{6.186}$$

となる．ニュートリノ以外の熱い残存粒子について，式 (6.185) による制限は

$g_{*S}(x_f)$ の値が大きくなるほど緩和される．十分に初期の宇宙で熱い残存粒子の粒子数凍結が起きる場合，有効自由度は $g_{*S} \geq 106.75$ となるから，10 eV 程度の質量でも許されるようになる．

冷たい残存粒子

次に，粒子数の凍結時に残存粒子が非相対論的な場合を考える．このような粒子は**冷たい残存粒子** (cold relics) と呼ばれる．冷たい残存粒子がダークマターの正体であるとするモデルは**コールド・ダークマター・モデル** (cold dark matter model) と呼ばれ，しばしば CDM と略される．冷たい残存粒子の場合，平衡状態におけるエントロピーあたりの数密度が温度低下とともに指数関数的に減少するため，最終的な残存粒子の量は粒子数凍結の詳細に依存する．

ここで簡単のため，熱平均された消滅反応の断面積がべき則 $\langle\sigma_A v\rangle \propto T^n$ の温度依存性を持つとする．このとき式 (6.180) は

$$\frac{dY}{dx} = -\frac{\lambda}{x^{n+2}}\left[Y^2 - {Y_{EQ}}^2\right] \tag{6.187}$$

となる．ただし

$$\lambda \equiv \left.\frac{s}{H}\langle\sigma_A v\rangle\right|_{T=m} = m_{Pl} m \left.\sqrt{\frac{\pi}{45}}\frac{g_{*S}}{\sqrt{g_*}}\langle\sigma_A v\rangle\right|_{T=m} \tag{6.188}$$

は変数 x について一定の定数である．また式 (2.119), (2.133) により

$$Y_{EQ} = \frac{45}{4\sqrt{2}\pi^{7/2}}\frac{g}{g_{*S}}x^{3/2}e^{-x} \tag{6.189}$$

である．

式 (6.187) はいわゆるリッカチ型微分方程式であり，解析的な解を求めることは一般にできないが，数値的に解くことが可能である．数値解の例を図 6.5 に示す．この図では $g/g_{*S} = 0.04$ とし，生成消滅反応の断面積が温度に依存しない $n = 0$ の場合を示している．断面積の大きさとして $\lambda = 10^{10}, 10^{12}, 10^{14}$ の 3 つの場合が示されている．温度の高い初期はエントロピーあたりの数密度 Y が平衡解 Y^{EQ} に一致しているが，温度と密度が下がると消滅反応が起こらなくなり，粒子数が凍結する様子が見てとれる．消滅断面積に比例する定数 λ が増えるほど，粒子数凍結の温度が下がり，最終的に残されるダークマター粒子の数密度が減る．

方程式 (6.187) の近似的な取り扱いにより，数値解の振る舞いを定量的に理解す

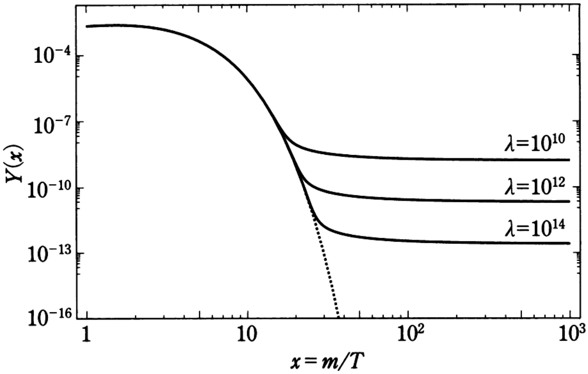


図 6.5 冷たいダークマター粒子に対するエントロピーあたりの数密度変化 $Y(x)$．点線が平衡状態の解 $Y_{EQ}(x)$ で，実線が実際の解である．消滅反応の断面積は温度依存性のない場合 $n = 0$ を仮定した．3 つの実線は異なる断面積の値に対応し，上から下へ $\lambda = 10^{10}, 10^{12}, 10^{14}$ と対応する．

ることもできる．十分に時間が経過して消滅反応が起こりにくくなると，平衡状態から脱して残存粒子が残ることにより，十分大きな x に対して $Y \gg Y_{EQ}$ となる．すると式 (6.187) は近似的に

$$\frac{dY}{dx} \simeq -\frac{\lambda}{x^{n+2}} Y^2 \tag{6.190}$$

となる．ここで $Y(x)$ と $Y_{EQ}(x)$ の差がある程度大きくなり，上の近似が成り立ち始める温度での変数 x の値を x_f とする．さらに $Y(\infty) \ll Y(x_f)$ と近似して，式 (6.190) を $x = x_f$ から $x = \infty$ まで積分すると

$$Y(\infty) \simeq \frac{(n+1){x_f}^{n+1}}{\lambda} \tag{6.191}$$

を得る．ただし $n > -1$ と仮定した．この解における x_f の値は，この近似的な取り扱いの枠内では求まらず，式 (6.187) の数値積分の結果と比較して求める必要がある．

一方で，残存粒子の量の見積りはおおまかにガモフの基準により求めることもできる．すなわち $\Gamma_A/H = 1$ を満たす値 $x = x_f$ を用いて $Y(\infty) \simeq Y_{EQ}(x_f)$ により求められる．ここで式 (6.181) と (6.187) を比較すると $\Gamma_A/H = \lambda x^{-n-1} Y_{EQ}$ となることがわかるので，ガモフの基準を適用すると，

$${x_f}^{n-1/2} e^{x_f} = \frac{45}{4\sqrt{2}\pi^{7/2}} \frac{g}{g_{*S}} \lambda \tag{6.192}$$

を満たす解として x_f が決められる．この方法では残存粒子の量が

$$Y(\infty) \simeq Y_{\rm EQ}(x_{\rm f}) = \frac{{x_{\rm f}}^{n+1}}{\lambda} \tag{6.193}$$

と見積もられる．これを式 (6.191) と比較すると，因子 $(n+1)$ を別にすれば同じ形をしている．式 (6.191) に導入した $x_{\rm f}$ の値は式 (6.192) で決められる $x_{\rm f}$ の値とは厳密には異なるが，おおまかには対応している．とくに消滅断面積に温度依存性がない $n=0$ の場合には一致する．

式 (6.191) を用いて現在の宇宙における冷たい残存粒子のエネルギー密度を見積もると，密度パラメータにして

$$\Omega_{\chi 0} = \frac{8\pi G}{3{H_0}^2} m s_0 Y(\infty) = \frac{16\pi^{5/2}}{9\sqrt{5}{m_{\rm Pl}}^3} \frac{g_{*S0}\,{T_0}^3}{{H_0}^2} \frac{\sqrt{g_*}}{g_{*S}\langle\sigma_{\rm A} v\rangle_1} (n+1){x_{\rm f}}^{n+1} \tag{6.194}$$

$$= 1.000 \times 10^{-27}\, h^{-2} \frac{\sqrt{g_*}}{g_{*S}} (n+1){x_{\rm f}}^{n+1} \left(\frac{\langle\sigma_{\rm A} v\rangle_1}{{\rm cm}^3/{\rm s}}\right)^{-1} \tag{6.195}$$

となる．反粒子の寄与も含めた密度パラメータは $\Omega_{\chi\bar{\chi}0} = 2\Omega_{\chi 0}$ で与えられる．ここで $\langle\sigma_{\rm A} v\rangle_1$ は $x = 1$ $(T = m)$ における熱平均された消滅反応断面積の値である．熱い残存粒子の場合と異なり，冷たい残存粒子の量は，熱平均された消滅反応断面積の大きさとその温度依存性によって異なる値をとる．このため，具体的にその値を求めるには相互作用の詳細を指定しなければならない．相互作用を記述するラグランジアンを与えれば反応断面積が計算できるので，そこから上のようにして $\Omega_{\chi 0}$ の値を見積もることができる．反応断面積は粒子の質量に依存するので，宇宙論的に $\Omega_{\chi\bar{\chi}0} < 0.12h^{-2}$ を満たさねばならないという条件から，冷たい残存粒子の質量に関する制限を得ることができる．

6.4 膨張宇宙における光子と電子の相互作用

宇宙を観測して得られる情報は，ほとんどが電磁波によるものである．このため，光子と物質の相互作用は宇宙論的に重要な過程であり，なかでも光子と電子の相互作用は非常に重要な役割を果たす．クライン–仁科の公式 (4.289) からわかるように，光子と自由荷電粒子の散乱において，散乱確率は粒子質量の 2 乗に反比例する．したがって，原子が電離している状態では，光子は原子核よりも自由電子によって強く散乱されることになる．そこで，ここではとくに光子と電子の相互作用系を考える．一様等方宇宙において，光子と電子の分布関数は等方的であるとする．さらに電子が非相対論的になっている時期を考え，光子と電子の衝突過程はトムソン散乱で近似できるものとする．

6.4.1 カンパニエーツ方程式

最初に，自由電子が存在する一様等方宇宙において，光子の分布関数に対する時間発展方程式を導く．光子と電子の分布関数をそれぞれ f_γ, f_e とする．散乱過程

$$\mathrm{e} + \gamma \leftrightarrow \mathrm{e} + \gamma \tag{6.196}$$

を考えると，衝突項の一般式 (6.76) により，光子の衝突項は

$$\begin{aligned}\mathscr{C}\,[f_\gamma(\boldsymbol{P}_\gamma)] = \frac{1}{2}\int \frac{2d^3P_\mathrm{e}}{(2\pi)^3 2E_\mathrm{e}} \int \frac{2d^3P'_\mathrm{e}}{(2\pi)^3 2E'_\mathrm{e}} \int \frac{2d^3P'_\gamma}{(2\pi)^3 2E'_\gamma} (2\pi)^4 \delta_\mathrm{D}^4(P_\gamma + P_\mathrm{e} - P'_\gamma - P'_\mathrm{e}) \\ \times |\mathscr{M}|^2 \Big\{ f_\gamma(\boldsymbol{P}'_\gamma) f_\mathrm{e}(\boldsymbol{P}'_\mathrm{e})[1 - f_\mathrm{e}(\boldsymbol{P}_\mathrm{e})][1 + f_\gamma(\boldsymbol{P}_\gamma)] \\ - f_\gamma(\boldsymbol{P}_\gamma) f_\mathrm{e}(\boldsymbol{P}_\mathrm{e})[1 - f_\mathrm{e}(\boldsymbol{P}'_\mathrm{e})][1 + f_\gamma(\boldsymbol{P}'_\gamma)] \Big\}\end{aligned} \tag{6.197}$$

で与えられる．ただし，電子の質量を m_e とするとき，

$$E_\mathrm{e} = \left(|\boldsymbol{P}_\mathrm{e}|^2 + m_\mathrm{e}{}^2\right)^{1/2}, \quad E'_\mathrm{e} = \left(\left|\boldsymbol{P}'_\mathrm{e}\right|^2 + m_\mathrm{e}{}^2\right)^{1/2}, \quad E_\gamma = \left|\boldsymbol{P}_\gamma\right| \tag{6.198}$$

である．また $|\mathscr{M}|^2$ は，不変散乱振幅の絶対値 2 乗で，衝突前後の内部自由度についてすべて平均してあるとする．トムソン散乱におけるその具体的な形は，式 (4.301) に与えられているように

$$|\mathscr{M}|^2 = 3\pi m_\mathrm{e}{}^2 \sigma_\mathrm{T} \left(1 + \cos^2\theta\right) \tag{6.199}$$

である．ただし $\cos\theta = \boldsymbol{P}_\gamma \cdot \boldsymbol{P}'_\gamma / |\boldsymbol{P}_\gamma||\boldsymbol{P}'_\gamma|$ は光子散乱角の余弦であり，

$$\sigma_\mathrm{T} = \frac{e^4}{6\pi m_\mathrm{e}{}^2} = \frac{8\pi\alpha^2}{3m_\mathrm{e}{}^2} \tag{6.200}$$

はトムソン断面積である．

非相対論的な電子を考えているので，各 4 元運動量の成分は

$$P_\gamma = (p, \boldsymbol{p}), \quad P_\mathrm{e} = \left(m_\mathrm{e} + \frac{q^2}{2m_\mathrm{e}}, \boldsymbol{q}\right), \quad P'_\gamma = (p', \boldsymbol{p}'), \quad P'_\mathrm{e} = \left(m_\mathrm{e} + \frac{q'^2}{2m_\mathrm{e}}, \boldsymbol{q}'\right) \tag{6.201}$$

で与えられる．ここで，$p = |\boldsymbol{p}|, p' = |\boldsymbol{p}'|, q = |\boldsymbol{q}|, q' = |\boldsymbol{q}'|$ は 3 次元運動量の絶対値である．また，電子については古典統計が成り立つものとすれば $1 - f_\mathrm{e} \simeq 1$ としてよい．すべての分布関数が等方的であるとき，それらは運動量の絶対値だけの関数として $f_\gamma(p), f_\mathrm{e}(q)$ などと書ける．ただし分布関数は時刻にも陽に依存するが，記法上の煩わしさを避けるため，以下では分布関数の引数において時間依存性を省略する．

以上の式を衝突項の式 (6.197) へ代入し，電子の非相対論的近似における最低次の項だけを残すと，

$$\mathscr{C}[f_\gamma(p)] = 3\pi^2\sigma_\mathrm{T} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{d^3q'}{(2\pi)^3}\frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\frac{1}{p'}\left[1+\left(\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}'}{pp'}\right)^2\right]$$
$$\times\,\delta_\mathrm{D}\left(p - p' + \frac{q^2 - q'^2}{2m_\mathrm{e}}\right)(2\pi)^3\delta^3_\mathrm{D}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'+\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}')$$
$$\times\,\{f_\gamma(p')f_\mathrm{e}(q')\,[1+f_\gamma(p)] - f_\gamma(p)f_\mathrm{e}(q)\,[1+f_\gamma(p')]\} \qquad (6.202)$$

が得られる．トムソン極限を考えているので，光子の典型的なエネルギーは電子の質量エネルギーよりも十分小さい．すなわち $p \ll m_\mathrm{e}$, $p' \ll m_\mathrm{e}$ が成り立つ．また，電子と光子の衝突がある程度の頻度で起きていれば，電子の典型的な運動エネルギーと光子の典型的なエネルギーは同程度の大きさになる．したがって，最初の 1 次元デルタ関数の中の各項はすべて同程度の大きさであり $p \sim p' \sim q^2/2m_\mathrm{e} \sim q'^2/2m_\mathrm{e}$ が成り立つ．したがって $q \sim (2m_\mathrm{e}p)^{1/2} \gg p$ などとなるので，

$$q \sim q' \gg p \sim p' \qquad (6.203)$$

という性質がある．すなわち，トムソン散乱では光子の典型的な運動量は電子の典型的な運動量に比べて十分小さい．すると典型的に $|\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'| \ll |\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}'|$ が成り立つ．ここで「典型的に」といっている意味は，分布関数の積分において支配的な寄与をする運動量の値がそのような性質を持つということである．この性質を用いると，式 (6.202) の積分を $\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'$ に関するテイラー展開によって近似的に求めることができる．この手続きはデルタ関数の展開

$$\delta^3_\mathrm{D}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'+\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}') \simeq \delta^3_\mathrm{D}(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}') + (\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{q}}\delta^3_\mathrm{D}(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}')$$
$$+\frac{1}{2}\left(p_i - p'_i\right)\left(p_j - p'_j\right)\frac{\partial^2}{\partial q_i\partial q_j}\delta^3_\mathrm{D}(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}') \qquad (6.204)$$

を代入して計算することと等価である．ここでデルタ関数の展開そのものに数学的な意味はないが，上の式に任意の関数をかけて部分積分することは積分後の式を展開することと同じである．

ここで式 (6.204) 右辺第 1 項を式 (6.202) へ代入すると，もう 1 つのデルタ関数により $p' = p, q' = q$ となり，このとき最後の因子が消えるため，積分には寄与しない．また，第 2 項を代入すると運動量の成分に関して奇数個の積の積分になる．光子の分布関数は等方的と仮定したので，この項では逆向きの運動量の寄与が打ち

消し合い，やはり積分には寄与しない．こうして，展開式 (6.204) 右辺第 3 項が積分に寄与する最低次の項となる．この積分の中で，$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}'$ の角度に依存する項は簡単な多項式の形となっている．そこで，最初に運動量 $\boldsymbol{p}'$ の角度積分を行う．また，衝突項全体は運動量 $\boldsymbol{p}$ の角度によらないので全体を角度平均して求めることができる．ここで必要な角度積分は

$$\int \frac{d\Omega}{4\pi}\frac{d\Omega'}{4\pi}\left[1+\left(\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}'}{pp'}\right)^2\right]\left(p_i-p'_i\right)\left(p_j-p'_j\right)=\frac{4}{9}\left(p^2+p'^2\right)\delta_{ij} \tag{6.205}$$

で与えられる．ただし $d\Omega, d\Omega'$ はそれぞれ $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}'$ の立体角要素である．この式を示すには次のようにする．まず，積分した後の左辺はいかなる特別な方向も持たないことに注意すると，必ず δ_{ij} に比例することがわかる．その比例係数は左辺の空間添字 i, j を縮約することで求められる．

以上の考察により，式 (6.202) に展開式 (6.204) を代入して得られる積分への最低次の寄与は

$$\begin{aligned}\mathscr{C}[f_\gamma(p)]=\frac{\sigma_{\mathrm{T}}}{3}\int&\frac{d^3q}{(2\pi)^3}d^3q'\,dp'\,p'\left(p'^2+p^2\right)\\&\times\delta_{\mathrm{D}}\left(p-p'+\frac{q^2-q'^2}{2m_{\mathrm{e}}}\right)\Delta_{\boldsymbol{q}}\delta^3_{\mathrm{D}}(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}')\\&\times\{f_\gamma(p')f_{\mathrm{e}}(q')\,[1+f_\gamma(p)]-f_\gamma(p)f_{\mathrm{e}}(q)\,[1+f_\gamma(p')]\}\end{aligned} \tag{6.206}$$

となる．ただし $\Delta_{\boldsymbol{q}}=\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{q}}\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{q}}$ はラプラシアンである．積分内の 1 次元デルタ関数によって p' の積分は自明に実行できる．さらに積分変数 $\boldsymbol{q}$ についてはラプラシアンを部分積分し，3 次元デルタ関数以外の部分に作用させる．ここで任意の関数 $F(q)$ について

$$\Delta_{\boldsymbol{q}}F(q)=\frac{1}{q^2}\frac{d}{dq}\left[q^2F'(q)\right] \tag{6.207}$$

となることを用いて変形してから，最後に 3 次元デルタ関数とともに $\boldsymbol{q}'$ 積分を行う．この計算の結果，

$$\begin{aligned}\mathscr{C}[f_\gamma(p)]=\frac{\sigma_{\mathrm{T}}}{3}\int&\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\,dp'\,p'\left(p'^2+p^2\right)\\&\times\left\{\left[\frac{q^2}{{m_{\mathrm{e}}}^2}\delta''_{\mathrm{D}}(p-p')+\frac{3}{m_{\mathrm{e}}}\delta'_{\mathrm{D}}(p-p')\right]f_{\mathrm{e}}(q)\,[f_\gamma(p')-f_\gamma(p)]\right.\\&\left.-\left[\frac{2q}{m_{\mathrm{e}}}\delta'_{\mathrm{D}}(p-p')f'_{\mathrm{e}}(q)+\delta'_{\mathrm{D}}(p-p')\frac{1}{q^2}\frac{d(q^2f'_{\mathrm{e}})}{dq}\right]f_\gamma(p)\,[1+f_\gamma(p')]\right\}\end{aligned} \tag{6.208}$$

が得られる．

上の式で最後の q の全微分で表されている項は表面積分になるため $\boldsymbol{q}$ 積分により消える．ここで，電子の数密度は

$$n_{\mathrm{e}} = \int \frac{2d^3q}{(2\pi)^3} f_{\mathrm{e}}(q) \tag{6.209}$$

で与えられ，さらにこの積分の部分積分から，

$$\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} q f_{\mathrm{e}}'(q) = -\frac{3}{2} n_{\mathrm{e}} \tag{6.210}$$

となる．また，一般に平衡状態にあるとは限らない電子に対して，一般化された温度 T_{e} を運動エネルギーの期待値により

$$\int \frac{2d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q^2}{2m_{\mathrm{e}}} f_{\mathrm{e}}(q) = \frac{3}{2} n_{\mathrm{e}} T_{\mathrm{e}} \tag{6.211}$$

で定義する．平衡状態のときは，上式で定義される温度と熱力学的な温度が一致する．これらの式 (6.209)-(6.211) を用いると，式 (6.208) の $\boldsymbol{q}$ 積分が実行できて，

$$\begin{aligned} \mathscr{C}[f_\gamma(p)] = \frac{n_{\mathrm{e}}\sigma_{\mathrm{T}}}{2m_{\mathrm{e}}} \int_0^\infty dp'\, p' \left(p'^2 + p^2\right) \Big\{ & T_{\mathrm{e}} \delta_{\mathrm{D}}''(p-p') \left[f_\gamma(p') - f_\gamma(p)\right] \\ & + \delta_{\mathrm{D}}'(p-p') \left[f_\gamma(p') + f_\gamma(p) + 2f_\gamma(p') f_\gamma(p)\right] \Big\} \end{aligned} \tag{6.212}$$

となる．最後にデルタ関数の微分を部分積分してから p' 積分を実行し，さらに変形してまとめると，最終的に簡潔な形

$$\mathscr{C}[f_\gamma(p)] = \frac{n_{\mathrm{e}}\sigma_{\mathrm{T}}}{m_{\mathrm{e}}} \frac{1}{p} \frac{\partial}{\partial p} \left\{ p^4 \left[T_{\mathrm{e}} \frac{\partial f_\gamma}{\partial p} + f_\gamma (1 + f_\gamma) \right] \right\} \tag{6.213}$$

が得られる．この衝突項を一様等方宇宙のボルツマン方程式 (6.82) の右辺へ代入すると，$f = f_\gamma, E = p$ として

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} E \frac{\partial f}{\partial E} = \frac{n_{\mathrm{e}}\sigma_{\mathrm{T}}}{m_{\mathrm{e}}} \frac{1}{E^2} \frac{\partial}{\partial E} \left\{ E^4 \left[T_{\mathrm{e}} \frac{\partial f}{\partial E} + f(1+f) \right] \right\} \tag{6.214}$$

となる．電子の分布関数が与えられれば，式 (6.209), (6.211) により電子数密度 n_{e} と一般化された電子温度 T_{e} が得られ，上の方程式により光子に対する分布関数の時間進化が記述される．

式 (6.214) に E^2 をかけてから E で積分すると，衝突項は部分積分により表面項となって消える．式 (6.88) によれば，これは共動体積あたりの光子の数密度が保存されることを表す．具体的に光子の数密度は

$$n_\gamma(t) = \int \frac{2d^3p}{(2\pi)^3} f(E,t) \tag{6.215}$$

で与えられ，式 (6.88) は

$$\frac{\partial n_\gamma}{\partial t} + 3\frac{\dot{a}}{a} n_\gamma = 0 \tag{6.216}$$

となる．

次に，宇宙膨張の効果が無視できる場合を考える．つまり，分布関数の変化率 $\partial f/\partial t$ が宇宙の膨張率 $\dot{a}/a$ に比べて十分小さいとし，式 (6.214) の左辺第 2 項が無視できるとする．この場合，光子の分布関数に対する独立変数 E, t に対して，次の変数変換

$$E \to x = \frac{E}{T_\mathrm{e}}, \quad t \to y = \frac{\sigma_\mathrm{T}}{m_\mathrm{e}} \int^t T_\mathrm{e} n_\mathrm{e} dt \tag{6.217}$$

を行うと，式 (6.214) は簡潔な式

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[x^4 \left(\frac{\partial f}{\partial x} + f(1+f) \right) \right] \tag{6.218}$$

となる．この式を**カンパニエーツ方程式** (Kompaneets equation) という*5．

時間変数の代わりに導入された変数 y の微小変化は

$$dy = \frac{T_\mathrm{e}}{m_\mathrm{e}} n_\mathrm{e} \sigma_\mathrm{T} dt \tag{6.219}$$

である．トムソン散乱では，電子の運動エネルギーと光子のエネルギーが同程度の大きさを持つから，電子の温度 T_e は平均的な光子のエネルギー E と同程度の大きさになる．コンプトン散乱における光子のエネルギー変化の式 (4.282)，およびエネルギー E と波長 λ が逆比例することにより，光の波長変化はおおまかに $|\lambda'/\lambda - 1| \equiv |\Delta\lambda|/\lambda \sim E/m_\mathrm{e}$ の程度になることがわかる．したがって，$T_\mathrm{e}/m_\mathrm{e} \sim E/m_\mathrm{e}$ はおおまかに光子の波長変化を表す量になる．トムソン散乱ではこの量が非常に小さいので，光子の振動数変化は $|\Delta\nu|/\nu = |\Delta\lambda|/\lambda \sim T_\mathrm{e}/m_\mathrm{e}$ で与えられる．一方，式 (6.219) において $d\tau = n_\mathrm{e}\sigma_\mathrm{T} dt$ は光子の進む距離 dt に対する光学的厚みを与える．光学的厚みとは，対応する距離を進む間に散乱される割合を表す量である．したがって，式 (6.219) は光子が dt だけ進む間の平均的な振動数変化を表すものと解釈できる．これを積分したパラメータである y は，有限区間での光子の平均的な振動数変化に対応する．このため，この変数 y は**コンプトン化パラメー**

*5 A.S. Kompaneets, *Soviet Physics, JETP*, **4**, 730 (1957).

タ (Comptonization parameter) と呼ばれる．1 回のトムソン散乱における光子の振動数変化は無視できるほど小さいが，何度も散乱を受けることによって，積分量である y は大きな値になり得る．

6.4.2 宇宙の熱平衡化

自由電子と相互作用する光子のボルツマン方程式 (6.214) の応用例として，宇宙の熱進化における光子と物質の熱平衡化の過程を調べる．一様等方宇宙における光子の分布関数を $f(E)$ とすると，そのエネルギー密度は

$$\rho_\gamma = \int \frac{2d^3P}{(2\pi)^3} E f(E) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty dE\, E^3 f(E) \tag{6.220}$$

で与えられる．ただし光子は質量を持たないので $E = |\boldsymbol{P}|$ である．次に，一般に平衡状態にあるとは限らない光子に対して，一般化された光子の温度を

$$T_\gamma \equiv \frac{1}{2\rho_\gamma} \int \frac{d^3P}{(2\pi)^3} E^2 f(E)\,[1 + f(E)] = \frac{1}{4\pi^2\rho_\gamma} \int_0^\infty dE\, E^4 f(E)\,[1 + f(E)] \tag{6.221}$$

で定義する．平衡状態の場合，分布関数 $f_{\rm eq} = (e^{E/T} - 1)^{-1}$ を上の定義に代入すると，確かに光子の温度と一致する．

この準備の下，式 (6.214) に E^3 をかけてから E で積分する．適切な部分積分の後，

$$\frac{d\rho_\gamma}{dt} + 4\,\frac{\dot{a}}{a}\rho_\gamma = \frac{4n_{\rm e}\sigma_{\rm T}}{m_{\rm e}}\rho_\gamma\,(T_{\rm e} - T_\gamma) \tag{6.222}$$

という式が得られる．この有用な式はレイ・ヴァイマンによって最初に導かれた*6．電子と光子の温度が等しいと右辺がゼロになり，方程式の解は $\rho_\gamma \propto a^{-4}$ となる．このときは電子と光子の間で実質的なエネルギーの交換がないため，膨張によって光子の数密度が a^{-3} に比例して減少する効果と，赤方偏移によりエネルギーが a^{-1} に比例して減少する効果で説明できる．電子の温度が光子の温度よりも高ければ右辺が正になり，電子によって光子が暖められる．逆に電子の温度の方が低ければ，電子によって光子が冷やされる．

いま，宇宙にある主要なバリオン成分として，自由電子，水素原子，およびヘリウム原子を考える．それらの数密度をそれぞれ $n_{\rm e}, n_{\rm H}, n_{\rm He}$ とする．ただし，原子の数密度 $n_{\rm H}, n_{\rm He}$ は電離しているかどうかにかかわらず，原子核数をもとにした値とする．これら 3 種類の粒子がすべて非相対論的に振る舞う時期を考える．そし

*6 R. Weymann, *Phys. Fluids*, **8**, 2112 (1965).

て，これらの粒子はトムソン散乱とクーロン相互作用によって共通の温度 $T_{\rm b}$ を持つとする．光子の圧力は式 (2.127) により $\rho_\gamma/3$ であり，非相対論的粒子のエネルギー密度と圧力は式 (2.120), (2.121) で与えられるから，これらバリオン成分と光子を合わせた全エネルギー密度 ρ と全圧力 p は，それぞれ

$$\rho = m_{\rm e}n_{\rm e} + m_{\rm H}n_{\rm H} + m_{\rm He}n_{\rm He} + \frac{3}{2}\left(n_{\rm e} + n_{\rm H} + n_{\rm He}\right)T_{\rm b} + \rho_\gamma \tag{6.223}$$

$$p = \left(n_{\rm e} + n_{\rm H} + n_{\rm He}\right)T_{\rm b} + \frac{1}{3}\rho_\gamma \tag{6.224}$$

となる．ただし $m_{\rm e}, m_{\rm H}, m_{\rm He}$ はそれぞれ自由電子，水素原子，ヘリウム原子の質量である．

いま考えようとする時期では，共動体積あたりの水素原子核の数 $a^3n_{\rm H}$ とヘリウム原子核の数 $a^3n_{\rm He}$ は変化しない．このため

$$\frac{dn_{\rm H}}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a}n_{\rm H} = 0, \quad \frac{dn_{\rm He}}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a}n_{\rm He} = 0 \tag{6.225}$$

が成り立つ．共動体積あたりの自由電子数は再結合時期に大きく変化する．だが，それ以外の時期を考えればその変化は十分にゆっくりとしている．そこで再結合時期を除いた時期を考えることにして，

$$\frac{dn_{\rm e}}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a}n_{\rm e} = 0 \tag{6.226}$$

を仮定する．ここで，一様等方宇宙における保存則の式 (2.57) は

$$\frac{d\rho}{dt} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \tag{6.227}$$

である．ダークマターが他のエネルギー成分から完全に脱結合していれば，この方程式はダークマター成分のみ，またはそれ以外の成分のみでも成り立つ．なぜなら，この式は $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ という条件から導かれるのであり，式 (1.91) によって $T^{\mu\nu}{}_{;\nu}$ は流体に働く外からの 4 元力を一般座標で表した量だからである．成分間に相互作用がなければ外力が働かない．そこでバリオン成分と光子の混合流体に対する式 (6.223), (6.224) を式 (6.227) に代入し，さらに式 (6.225), (6.226) を用いて変形すると，

$$\frac{3}{2}\left(n_{\rm e} + n_{\rm H} + n_{\rm He}\right)\left(\frac{dT_{\rm b}}{dt} + 2\frac{\dot{a}}{a}T_{\rm b}\right) + \frac{d\rho_\gamma}{dt} + 4\frac{\dot{a}}{a}\rho_\gamma = 0 \tag{6.228}$$

が得られる．ここに式 (6.222) を代入し，$T_{\rm e} = T_{\rm b}$ を用いると，

$$\frac{dT_\mathrm{b}}{dt} + 2\frac{\dot{a}}{a}T_\mathrm{b} = \frac{8}{3}\frac{\sigma_\mathrm{T}}{m_\mathrm{e}}\frac{X_\mathrm{e}}{1 + f_\mathrm{He} + X_\mathrm{e}}\rho_\gamma (T_\gamma - T_\mathrm{b}) \tag{6.229}$$

が得られる．ただし，

$$X_\mathrm{e} = \frac{n_\mathrm{e}}{n_\mathrm{H}}, \quad f_\mathrm{He} = \frac{n_\mathrm{He}}{n_\mathrm{H}} \tag{6.230}$$

とおいた．ここで X_e はヘリウム原子が中性化していれば水素の電離率に等しい．また，ヘリウム原子核の存在比が原始元素合成における値に等しければ，

$$f_\mathrm{He} = \frac{Y_\mathrm{P}}{4(1 - Y_\mathrm{P})} \simeq 0.083 \tag{6.231}$$

となる．ただし $Y_\mathrm{P} \simeq 0.25$ は式 (2.175), (2.177) で与えられる原始ヘリウム原子核の質量存在比である．

バリオンと光子の温度が等しいと，式 (6.229) の右辺はゼロになり，この方程式の解は $T_\mathrm{b} \propto a^{-2}$ となる．電子や陽子は非相対論的であると仮定されているので，光子からの作用がなければ非相対論的な運動エネルギーが a^{-2} に比例して減少することに対応している．ところが，光子温度の減少は $T_\gamma \propto a^{-1}$ であるから，すぐに右辺がゼロでなくなり，この状況は長くは続かない．光子温度の方が高い場合，右辺が正になりバリオンが光子によって暖められる．このため，バリオン温度が光子温度よりも速く低下することは妨げられることになる．すなわち，宇宙膨張はバリオンと光子の温度差を広げようとする一方，トムソン散乱による相互作用は温度差を縮めようとする．どちらの効果の方が大きいかは，式 (6.229) における右辺の係数の大きさに依存する．左辺の温度変化は宇宙の膨張率 $H = \dot{a}/a$ と同程度の変化である．したがって右辺の温度にかかっている係数が宇宙の膨張率 H よりも十分大きければ，$T_\mathrm{b} = T_\gamma$ が保たれる．逆に右辺の係数が十分小さければ，温度 T_b は a^{-2} に比例して下がり，a^{-1} に比例する光子温度 T_γ との差は広がっていく．

ここで，現実の宇宙における光子の数密度はバリオンの数密度よりもはるかに多く，$n_\gamma \gg n_\mathrm{e}$ が成り立つことに注意する．式 (2.176) からわかるように，その差は 9 桁以上にも及ぶ．このため，1 つの電子が光子に散乱される回数は，1 つの光子が電子に散乱される回数よりも圧倒的に多い．したがって，トムソン散乱によって光子のエネルギー分布関数がほとんど変化しなくても，バリオンの分布関数は急速に変化し得る．このことから光子の分布関数はほとんど平衡状態になっていると期待できるので，式 (2.126) により，

$$\rho_\gamma = \frac{\pi^2}{15}{T_\gamma}^4 \tag{6.232}$$

と近似できる．上述のように，バリオン温度が光子温度に近づけられる時間スケールは，式 (6.229) 右辺の係数の大きさによる．この式の左辺は T_b の時間微分であるから，右辺にある T_b の比例係数の絶対値が，変化に要する時間スケールの逆数 $1/t_\mathrm{b}$ を与える．その値は

$$t_\mathrm{b} = \frac{45}{8\pi^2}\frac{1+f_\mathrm{He}+X_\mathrm{e}}{X_\mathrm{e}}\frac{m_\mathrm{e}}{\sigma_\mathrm{T}{T_\gamma}^4} \tag{6.233}$$

となる．物質優勢期における宇宙の膨張率は，式 (2.80) において Ω_m0 の項だけを残して得られる $H = H_0{\Omega_\mathrm{m0}}^{1/2}(1+z)^{3/2}$ で与えられる．式 (6.233) と膨張の時間スケール H^{-1} の比をとると，

$$Ht_\mathrm{b} = \frac{45}{8\pi^2}\frac{1+f_\mathrm{He}+X_\mathrm{e}}{X_\mathrm{e}}\frac{m_\mathrm{e}}{\sigma_\mathrm{T}}\frac{H_0\sqrt{\Omega_\mathrm{m0}}}{{T_0}^4}(1+z)^{-5/2} \tag{6.234}$$

$$\simeq 7.34\times 10^{-7}\,\frac{1+f_\mathrm{He}+X_\mathrm{e}}{X_\mathrm{e}}\left(\frac{\Omega_\mathrm{m0}h^2}{0.14}\right)^{1/2}\left(\frac{1+z}{1300}\right)^{-5/2} \tag{6.235}$$

となる．

水素再結合の時期より以前の $1+z > 1300$ では，電離率 X_e が 1 程度の値から極端に小さくなることはない．このとき式 (6.235) により $t_\mathrm{b} \ll H^{-1}$ となるから，方程式 (6.229) 左辺の時間変化の程度は，右辺の係数に比べて無視できる．したがって方程式の右辺で大きな係数を除いた部分が近似的にゼロとなり，その解は $T_\mathrm{b} = T_\gamma$ である．すなわち，バリオンと光子の温度は共通の値に保たれていることがわかる．

一方，再結合時期より以後では，ほとんどの自由電子が再結合しているので，$X_\mathrm{e} \ll 1$ である．だが，わずかに再結合を逃れて残されている自由電子が存在し，それらは背景放射光子と相互作用できる．このため，再結合時期を過ぎてもバリオン成分と光子の相互作用が完全には切れず，バリオン温度がしばらくは光子温度に引きずられる．この効果はおおまかに条件 $t_\mathrm{b} = H^{-1}$ が満たされるまで続くと考えられる．そこで $X_\mathrm{e}, f_\mathrm{He} \ll 1$ と近似し，式 (6.234) で $Ht_\mathrm{b} = 1$ とおけば，

$$1+z = \left(\frac{45}{8\pi^2}\frac{m_\mathrm{e}}{\sigma_\mathrm{T}}\frac{H_0{\Omega_\mathrm{m0}}^{1/2}}{{T_0}^4}\frac{1}{X_\mathrm{e}}\right)^{2/5} \tag{6.236}$$

$$\simeq 117\left(\frac{\Omega_\mathrm{m0}h^2}{0.14}\right)^{1/5}\left(\frac{X_\mathrm{e}}{3\times 10^{-4}}\right)^{-2/5} \tag{6.237}$$

が得られる．図 6.3 を見るとわかるように，$z = 100 \sim 200$ のとき $X_\mathrm{e} \simeq 3\times 10^{-4}$ 程

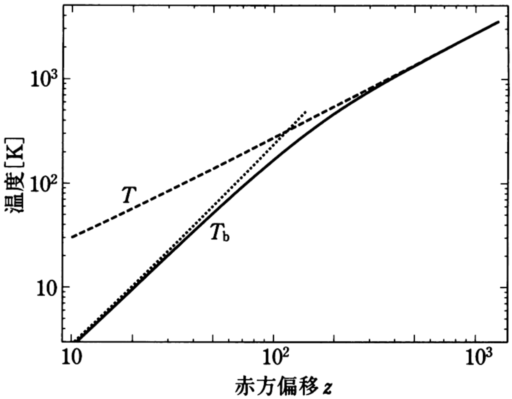


図 6.6 再結合後の光子温度 T（破線）とバリオン温度 T_b（実線）の変化．点線は $(1+z)^2T_0/117$ を表す．宇宙論パラメータの値には，付録 A.4 の観測値を用いた．

度になる．したがって，再結合の時期 $z \simeq 1300$ を過ぎても $z \gtrsim 120$ くらいまでは，バリオン温度が光子温度に引きずられて $T_b \propto a^{-1}$ と変化する時期が続く．この効果は $z \lesssim 120$ において効かなくなるので，その後は $T_b \propto a^{-2}$ と変化するようになる．

図 6.6 に，微分方程式 (6.229) の数値解を示す．ただし電離率 X_e の変化には多励起状態の効果を現象論的に加えたピーブルス・モデル，すなわち図 6.4 の実線と同じものを用いた．実線がバリオン温度であり，破線が光子温度を表している．また，点線は式 (6.237) で見積もった赤方偏移 $z = 116$ において，そのときの光子温度から $(1+z)^2$ で時間変化させた近似的なバリオン温度である．すなわち，

$$T_b \approx \frac{(1+z)^2 T_0}{117} \tag{6.238}$$

を表す．低赤方偏移側 $z \lesssim 30$ において，上式はバリオン温度を表すよい近似になっていることがわかる．

6.4.3 スニヤエフ-ゼルドビッチ効果

電子の再結合の後に光子が脱結合するが，その後の光子はまったく物質と相互作用できないわけではない．その後の宇宙の進化の中で，局所的に密度の高い場所が生まれて天体が形成されると，宇宙空間の原子や分子が再び電離される．とくに銀河の集団である銀河団の中では，銀河間物質が電離して高温プラズマの状態になっている．このような場所を通過する宇宙マイクロ波背景放射の光子は，逆コンプ

トン散乱によって電子からエネルギーを受け取る．このため，宇宙マイクロ波背景放射を観測する視線方向上に銀河団があると，この影響によって放射スペクトルが変形される．この効果のことを**スニヤエフ-ゼルドビッチ効果** (Sunyaev-Zel'dovich effect) という．

宇宙マイクロ波背景放射が銀河団を通過する時間は宇宙年齢に比べて十分短いので，その間の宇宙膨張は無視できて，カンパニエーツ方程式 (6.218) が適用できる．ここでは，最終的に観測者へ届く背景放射光子の分布関数の形を考える．観測される背景放射光子は光円錐上にあるので，分布関数の時間変数を視線方向と逆向きにとった空間変数に置き換えることができる．つまり，カンパニエーツ方程式の変数 y を表す積分の式 (6.217) は，背景放射光子の経路に沿った線積分

$$y = \frac{\sigma_{\mathrm{T}}}{m_{\mathrm{e}}} \int^{r} T_{\mathrm{e}}(r) n_{\mathrm{e}}(r) dr \tag{6.239}$$

であると解釈できる．ここで $T_{\mathrm{e}}(r)$, $n_{\mathrm{e}}(r)$ は，観測方向を固定して見たときの，視線方向上の距離 r における電子温度と電子数密度である．この場合のカンパニエーツ方程式は，最終的に観測される背景放射光子の分布関数が，光子の経路上でどのように変化するのかを記述するものと考えられる．

銀河団中の電子温度は背景放射温度より十分に高温なので，式 (6.214) 右辺は T_{e} を含む項以外を無視することができる．この場合のカンパニエーツ方程式 (6.218) は

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^4 \frac{\partial f}{\partial x} \right) \tag{6.240}$$

と近似できる．ただし f は背景放射光子の分布関数である．

この方程式を解くには，新たな変数

$$\xi \equiv \ln x + 3y \tag{6.241}$$

を定義するとよい．ここで独立変数の組を (x, y) から (ξ, y) に変換し，$F(\xi, y) = f(x, y) = f(e^{\xi - 3y}, y)$ とする．このとき式 (6.240) は

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} \tag{6.242}$$

と変形される．これはよく知られた拡散方程式の形であり，ξ に関するフーリエ変換によって直線的に解が求められる．その一般解は

$$F(\xi, y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi y}} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi'\ e^{-(\xi-\xi')^2/4y} F(\xi', 0) \tag{6.243}$$

である．この解をもとの分布関数 $f(x,y)$ で表し直して，さらに積分変数を変換すると，

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi y}} \int_{-\infty}^{\infty} ds\, e^{-s^2/y} f\left(e^{2s+3y}x, 0\right) \tag{6.244}$$

が得られる．これが式 (6.240) の一般解である．

宇宙マイクロ波背景放射は非常に高い精度でプランク分布をしている．銀河団の外では電子温度 T_e と光子温度 T が等しいから，光子エネルギーを E として，式 (6.217) により $x = E/T_\mathrm{e} = E/T$ である．したがって銀河団に入る前の初期分布関数 $f(x,0)$ は温度 T のプランク分布

$$f(x, 0) = \frac{1}{e^x - 1} \equiv f_0(x) \tag{6.245}$$

となる．銀河団中では $T \neq T_\mathrm{e}$ であるが，銀河団を通過した後は再び $T = T_\mathrm{e}$ となる．銀河団を通過した後の分布関数は，銀河団を視線方向に積分したコンプトン化パラメータの値 y を用いて $f(x,y)$ で与えられ，このときまた $x = E/T$ である．

実際の典型的な銀河団のサイズ L は数 Mpc であり，また銀河団中では典型的に $n_\mathrm{e} \sim 10^{-3}\,\mathrm{cm}^3$, $T_\mathrm{e} \sim 10\,\mathrm{keV}$ であることから，式 (6.219) を銀河団中で視線方向に積分したコンプトン化パラメータの値は $y \sim T_\mathrm{e} n_\mathrm{e} L \sigma_\mathrm{T}/m_\mathrm{e} \sim 10^{-4}$ 程度の小さな値となる．したがって，式 (6.244) を直接積分しなくても，分布関数 f を y の 1 次までテイラー展開して式 (6.240) を用いることにより，

$$f(x, y) \simeq f_0(x) + \frac{y}{x^2} \frac{\partial}{\partial x}\left(x^4 \frac{\partial f_0}{\partial x}\right) \tag{6.246}$$

という近似解が得られる．したがって分布関数の相対変化量は

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f}{f} &\equiv \frac{f(x,y) - f_0(x)}{f_0(x)} \simeq \frac{y}{x^2 f_0} \frac{\partial}{\partial x}\left(x^4 \frac{\partial f_0}{\partial x}\right) \\ &= \frac{xy}{1 - e^{-x}}\left(x \coth\frac{x}{2} - 4\right) \to \begin{cases} -2y & (x \ll 1) \\ x(x-4)y & (x \gg 1) \end{cases} \end{aligned} \tag{6.247}$$

となる．式 (2.193) のところで導いたように，輝度関数 I_ν は分布関数と $I_\nu = 4\pi\nu^3 f$ の関係にあるから，上に求めた分布関数の相対変化量 $\Delta f/f$ は，輝度関数の相対変化量 $\Delta I_\nu/I_\nu$ にも等しい．ある波長の光に対する輝度関数の値から見積もられる温

度を**輝度温度** (brightness temperature) という．式 (2.193) の微小変化をとることにより，輝度温度の相対変化量は

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1 - e^{-x}}{x} \frac{\Delta I_\nu}{I_\nu} \tag{6.248}$$

で与えられる．ただし $x = 2\pi\nu/T = E/T$ である．したがって，式 (6.247) を輝度温度の変化で表せば，

$$\frac{\Delta T}{T} = y\left(x \coth\frac{x}{2} - 4\right) \to \begin{cases} -2y & (x \ll 1) \\ (x-4)y & (x \gg 1) \end{cases} \tag{6.249}$$

となる．

長波長側のエネルギーの低いレイリー-ジーンズ領域では，上式における $x \ll 1$ の極限により，輝度温度の変化が負になる．これは，熱い銀河間物質との逆コンプトン散乱によって，低エネルギーの光子が高エネルギー側へ叩き上げられることによる．長波長側の光子が減ることで，輝度温度が下がるが，一方で，短波長側の $x \gg 1$ では，叩き上げられた光子によって逆に輝度温度が上がる．したがって，分布関数全体として光子の平均エネルギーが上がっている．このように波長によって異なる効果を受けるため，スニヤエフ-ゼルドビッチ効果を受けた光子の分布関数は，プランクの法則で表される黒体放射スペクトルとは異なる形になる．

式 (6.249) は，背景放射光子が銀河団を通過するときの輝度温度変化を表している．銀河団を出た光子が観測者に届くまでに，左辺の ΔT と T はともに同じ割合で赤方偏移を受けるため，その比 $\Delta T/T$ で与えられる温度ゆらぎは不変に保たれる．したがって，温度ゆらぎに対するスニヤエフ-ゼルドビッチ効果は，観測者から銀河団までの距離にはよらず，銀河団自体の性質をそのまま反映するという顕著な特徴を持つ．このため，高赤方偏移にある銀河団を見つけ出したり，その性質を調べたりするのに有用な手段を提供する．

6.5 トムソン散乱における偏極の取り扱い

光子の偏極は観測可能量であり，宇宙論的にも重要な情報を含む．この節では偏極自由度の運動学的な取り扱いについて述べる．光子の行う相互作用としてはトム

ソン散乱を念頭におき，光子を古典的な電磁波として取り扱う *7.

6.5.1 ストークス・パラメータ

真空中を伝播する角振動数 ω の単色平面電磁波を考える．電場と磁場は，電磁波の進行方向に対して垂直な平面内（偏極面）に値を持つベクトルである．この単色平面波の進行方向を z 軸にとり，偏極面内に適当に x 軸と y 軸をとる．空間中のある点における複素化した電場 *8 の成分は一般に

$$E_x(t) = E_{0x}\, e^{-i(\omega t - \delta_x)} \tag{6.250}$$

$$E_y(t) = E_{0y}\, e^{-i(\omega t - \delta_y)} \tag{6.251}$$

で与えられる．ここで E_{0x}, E_{0y}, δ_x, δ_y は実数定数であり，偏極面における各成分の振幅と位相を表している．上式の実部をとってみればわかるように，電場ベクトルの値は偏極面において楕円を描く．単色波は一般に楕円偏極となる．

だが，完全に位相のそろった単色波は自然界に発生しにくい．単色に見える電磁波であっても，実際には振動数の近い多数の単色波が重ね合わされたものになっている．平面波の振動数分布は連続的であるから，どんなに狭い幅の角振動数区間をとってきても，その中には多くの平面波が含まれる．こうして，ほとんど単色波とみなせる電磁波も，一般には振幅と位相の異なる平面波が無数に重ね合わされたものになっている．もし，重ね合わされている波の振幅と位相が完全にランダムでお互いに相関を持たなければ，その電磁波には偏極がない．逆に，それらに相関があるとき，その電磁波には偏極がある．

そこで，角振動数がある値 ω のまわりの狭い範囲にある多数の平面波について平均することにより，2 次元偏極面上の強度テンソル

$$T_{ab} \equiv \langle E_a{}^* E_b \rangle \tag{6.252}$$

を定義する．ただし a, b は偏極面上の 2 次元座標 x, y のどちらかをとる添字である．2 次元強度テンソルは電磁波の強度と偏極を特徴づける．そのテンソル成分は $T_{ab}{}^* = T_{ba}$ を満たすエルミート行列である．任意の 2 次元エルミート行列は，式 (3.97) で定義されるパウリ行列 σ_i $(i = 1, 2, 3)$ および 2×2 単位行列 σ_0 の重ね合わせで与えることができるので，一般に

*7 散乱における量子論的な偏極の取り扱いは，たとえば次の文献などに見られる: A. Kosowsky, *Ann. Phys.*, **246**, 49 (1996); M. Beneke and C. Fidler, *Phys. Rev. D.* **82**, 063509(2010).

*8 複素化した電場の実部が実際の電場に対応する．

$$T = \frac{1}{2}(I\sigma_0 + Q\sigma_3 + U\sigma_1 + V\sigma_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I+Q & U-iV \\ U+iV & I-Q \end{pmatrix} \tag{6.253}$$

と表現できる．ここで 4 つの実数 I, Q, U, V はストークス・パラメータ (Stokes parameters) と呼ばれる量である．これら 4 つのパラメータ全体は，強度テンソル T_{ab} と同等の情報を持っている．ストークス・パラメータは，位相の揃っていない波を重ね合わせた場合に加法性を満たす．すなわち，重ね合わせた後のストークス・パラメータの値は重ね合わせる前のストークス・パラメータの値を加えたものである．位相の揃った波を加え合わせると，その位相によって振幅が増幅されたり打ち消し合ったりするが，そうでなければ平均的に波の重ね合わせによって振幅の 2 乗が加法性を満たすからである．

式 (6.253) の表現から具体的にストークス・パラメータを表すと，

$$I = \left\langle |E_x|^2 + |E_y|^2 \right\rangle = \left\langle {E_{0x}}^2 + {E_{0y}}^2 \right\rangle \tag{6.254}$$

$$Q = \left\langle |E_x|^2 - |E_y|^2 \right\rangle = \left\langle {E_{0x}}^2 - {E_{0y}}^2 \right\rangle \tag{6.255}$$

$$U = 2\left\langle \mathrm{Re}\,(E_x {E_y}^*) \right\rangle = 2\left\langle E_{0x}E_{0y}\cos(\delta_x - \delta_y) \right\rangle \tag{6.256}$$

$$V = 2\left\langle \mathrm{Im}\,(E_x {E_y}^*) \right\rangle = 2\left\langle E_{0x}E_{0y}\sin(\delta_x - \delta_y) \right\rangle \tag{6.257}$$

が得られる．ここで変数 I は振幅の 2 乗平均値であるから，電磁波の強度に対応するパラメータである．その他のパラメータは，振幅や位相の間に相関がある場合にだけゼロでない値を持つから，偏極の状態を表すパラメータになっている．偏極方向が一定となる直線偏極の場合には，E_x と E_y が比例するので $\delta_x - \delta_y$ は π の整数倍になる．このときパラメータ V がゼロになるので，パラメータ V は偏極の回転性を特徴づけている．残りのパラメータ Q, U が直線偏極の成分を定めている．完全な単色波に対しては，式 (6.254)-(6.257) のそれぞれで右辺の平均操作をしない式が成り立ち，つねに $I^2 = Q^2 + U^2 + V^2$ が成り立つ．だが，一般の重ね合わされた電磁波に対しては，不等式 $I^2 \geq Q^2 + U^2 + V^2$ が成り立ち，等号は楕円偏極をする場合に限って成り立つことが示される*9.

ストークス・パラメータの値は，偏極面の座標 x, y のとり方にも依存する．いま，xy 平面の座標軸を光の進行方向から見て反時計回りに角度 ψ だけ回転させると，回転行列

*9 S. Chandrasekhar, *Radiative Transfer* (Dover Publications, New York, 1960).

$$R = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \tag{6.258}$$

により，電場の成分は

$$\begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \tag{6.259}$$

と変換される．このとき式 (6.252) を行列とみなすと $T' = RTR^{\mathrm{T}}$ と変換される．またパウリ行列は

$$R\sigma_0 R^{\mathrm{T}} = \sigma_0, \quad R\sigma_1 R^{\mathrm{T}} = \sigma_1 \cos 2\psi + \sigma_3 \sin 2\psi \tag{6.260}$$

$$R\sigma_2 R^{\mathrm{T}} = \sigma_2, \quad R\sigma_3 R^{\mathrm{T}} = -\sigma_1 \sin 2\psi + \sigma_3 \cos 2\psi \tag{6.261}$$

と変換することが確かめられる．上式と式 (6.253) により，ストークス・パラメータの変換が求められ，

$$\begin{pmatrix} I' \\ Q' \\ U' \\ V' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\psi & \sin 2\psi & 0 \\ 0 & -\sin 2\psi & \cos 2\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} \tag{6.262}$$

となる．

この式からわかるように，ストークス・パラメータ I, V は偏極面の座標系に依存しない不変量であるが，Q, U は座標系に依存して決まる．これは Q, U が直線偏極に関係するパラメータだからである．その意味を見るため，完全な単色波で直線偏極の場合を考えて $\delta_x = \delta_y$ とすると $Q = {E_{0x}}^2 - {E_{0y}}^2$, $U = 2E_{0x}E_{0y}$ となる．ここで x 軸と電場ベクトルの間の角度を α とすると $(E_{0x}, E_{0y}) = (E_0 \cos\alpha, E_0 \sin\alpha)$ と書ける．するとこのとき $U/Q = \tan 2\alpha$ という関係が得られる．この考察から，

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan \frac{U}{Q} \tag{6.263}$$

で定義される角度は x 軸に対する直線偏極の偏極方向を表すことがわかる．ここで，偏極面上に定義されるベクトル

$$\boldsymbol{P} = \sqrt{Q^2 + U^2}(\cos\alpha, \sin\alpha, 0) \tag{6.264}$$

は偏極ベクトルを表している．式 (6.263) で定義される角度 α は $\alpha \to \alpha + \pi$ と変換

しても物理的な違いが現れない．すなわち偏極ベクトル $\boldsymbol{P}$ が定める方向とその逆向き方向には物理的な区別がないことを表している．この性質は偏極の物理的な概念に沿っている．

偏極面の回転に関する座標依存性を簡単に取り扱うため，式 (6.262) の変換行列を対角化する表示が便利である．そこで

$$\sigma_\pm \equiv \frac{\sigma_3 \mp i\sigma_1}{\sqrt{2}}, \quad Q_\pm \equiv \frac{Q \pm iU}{\sqrt{2}} \tag{6.265}$$

を定義する．このとき式 (6.253) は

$$T = \frac{1}{2}\left(I\sigma_0 + Q_+\sigma_+ + Q_-\sigma_- + V\sigma_2\right) \tag{6.266}$$

と書き直すことができる．偏極面の回転に対するパウリ行列の変換式 (6.260), (6.261) は $\sigma_\pm$ に対して

$$R\sigma_\pm R^{\mathrm{T}} = e^{\mp 2i\psi}\sigma_\pm \tag{6.267}$$

となる．このことから I, Q_+, Q_-, V の変換を求めると，

$$\begin{pmatrix} I' \\ Q'_+ \\ Q'_- \\ V' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2i\psi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2i\psi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ Q_+ \\ Q_- \\ V \end{pmatrix} \tag{6.268}$$

となり，変換行列が対角形になる．

最後に，偏極面上のパリティ変換に対するストークス・パラメータの性質を調べておく．偏極面上のパリティ変換は，ある 1 つの座標だけを反転する変換である．そこで $x \to -x$ もしくは $y \to -y$ のどちらか一方の変換を考えれば，定義式 (6.254)–(6.257) により

$$I \to I, \quad Q \to Q, \quad U \to -U, \quad V \to -V \tag{6.269}$$

と変換することがわかる．すなわち，I, Q のパリティは正であり，U, V のパリティは負である．また，$Q_\pm$ は

$$Q_\pm \to Q_\mp \tag{6.270}$$

と変換し，パリティ変換に関してお互いに入れ替わるという性質がある．

6.5.2 トムソン散乱行列

次にトムソン散乱の前後で偏極の自由度がどのように変化するかを考える．いま，式 (6.250), (6.251) で与えられる完全な単色波を考え，図 6.7 に示されるように，散乱前後の偏極面にそれぞれの座標をとる．すなわち，光子の進行方向を z 軸として，散乱の前後で光子の軌道を含む平面（散乱面）に x 軸を選び，それに垂直な方向へ y 軸を選ぶ．散乱角を β とすると，散乱前後で x 軸と z 軸の方向が角度 β だけ回転し，y 軸の方向は変化しない．散乱面は散乱前後のどちらの座標でも xz 平面にある．

トムソン散乱に対して偏極自由度を含む微分散乱断面積は，入射電子の静止系において式 (4.291) で与えられる．散乱の前後での偏極ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{in}}, \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{sc}}$ として，式 (4.299) のトムソン散乱断面積 σ_{T} を用いて微分散乱断面積を表せば，

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{3}{8\pi}\sigma_{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{in}} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{sc}}\right)^2 \tag{6.271}$$

である．この散乱断面積には振動位相の情報が含まれていないので，散乱後のストークス・パラメータの値を求めるには不都合である．そこで，次のように考察する．完全な単色光に対して，散乱前の電場を $\boldsymbol{E}^{\mathrm{in}}$ とし，散乱後のものを $\boldsymbol{E}^{\mathrm{sc}}$ とする．ただし，上述のように散乱前と散乱後の座標軸は回転している．トムソン散乱では，入射波の電場が電子を振動させて，それが双極子放射を起こすことによって散乱波となると考えられる．一般に双極子モーメント $\boldsymbol{d}$ が時間変化するとき，散乱波として放射される電場は双極子放射の公式

$$\boldsymbol{E}^{\mathrm{sc}} = \frac{1}{4\pi r}\boldsymbol{n} \times \left(\boldsymbol{n} \times \ddot{\boldsymbol{d}}\right) \tag{6.272}$$

で与えられる*10．ただし $\ddot{\boldsymbol{d}}$ は双極子の時間に関する 2 階微分，r は散乱点からの距離，また $\boldsymbol{n}$ は散乱波の進行方向を表す単位ベクトルである．また，入射波による電子の加速度は $\ddot{\boldsymbol{r}}_{\mathrm{e}} = e\boldsymbol{E}^{\mathrm{in}}/m_{\mathrm{e}}$ であり，電子の双極子モーメントは $\boldsymbol{d} = e\boldsymbol{r}_{\mathrm{e}}$ であるから，

$$\ddot{\boldsymbol{d}} = \frac{e^2}{m_{\mathrm{e}}}\boldsymbol{E}^{\mathrm{in}} \tag{6.273}$$

である．上に現れるベクトルを散乱波の座標系から見ると

*10 J. D. Jackson *Classical Electrodynamics Third Edition* (Wiley, 1998); ランダウ-リフシッツ『場の古典論』（東京図書，1978）．

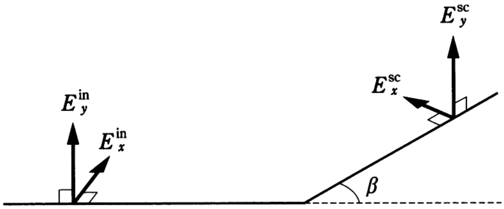


図 6.7 トムソン散乱の空間的な配位図.

$$\boldsymbol{n} = (0,0,1), \quad \boldsymbol{E}^{\rm in} = \left(E_x^{\rm in}\cos\beta, E_y^{\rm in}, E_x^{\rm in}\sin\beta\right) \tag{6.274}$$

という成分を持つから，式 (6.272), (6.273) によりこの座標系で

$$\boldsymbol{E}^{\rm sc} = -\frac{\alpha}{m_{\rm e} r}\left(E_x^{\rm in}\cos\beta, E_y^{\rm in}, 0\right) \tag{6.275}$$

が得られる．ただし $\alpha = e^2/4\pi$ は微細構造定数である．上式とストークス・パラメータの定義式 (6.254)–(6.257) により，散乱前のストークス・パラメータ ($I^{\rm in}$, $Q^{\rm in}, U^{\rm in}, V^{\rm in}$) と散乱後のストークス・パラメータ ($I^{\rm sc}, Q^{\rm sc}, U^{\rm sc}, V^{\rm sc}$) との間に成り立つ関係が導かれる．そのためには

$$\left\langle |E_x^{\rm in}|^2 \right\rangle = \frac{I^{\rm in} + Q^{\rm in}}{2}, \quad \left\langle |E_y^{\rm in}|^2 \right\rangle = \frac{I^{\rm in} - Q^{\rm in}}{2},$$
$$\left\langle {\rm Re}\left(E_x^{\rm in} E_y^{\rm in*}\right)\right\rangle = \frac{U^{\rm in}}{2}, \quad \left\langle {\rm Im}\left(E_x^{\rm in} E_y^{\rm in*}\right)\right\rangle = \frac{V^{\rm in}}{2} \tag{6.276}$$

を用いて変形すればよい．その結果を行列表示によって表すと

$$\begin{pmatrix} I^{\rm sc} \\ Q^{\rm sc} \\ U^{\rm sc} \\ V^{\rm sc} \end{pmatrix} = \frac{3\sigma_{\rm T}}{16\pi r^2} \begin{pmatrix} 1+\cos^2\beta & -\sin^2\beta & 0 & 0 \\ -\sin^2\beta & 1+\cos^2\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I^{\rm in} \\ Q^{\rm in} \\ U^{\rm in} \\ V^{\rm in} \end{pmatrix} \tag{6.277}$$

となる．さらにこれを $Q_\pm$ の基底によって表し直すと，

$$\begin{pmatrix} I^{\rm sc} \\ Q_+^{\rm sc} \\ Q_-^{\rm sc} \\ V^{\rm sc} \end{pmatrix} = \frac{3\sigma_{\rm T}}{16\pi r^2} \begin{pmatrix} 1+\cos^2\beta & -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^2\beta & -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^2\beta & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^2\beta & \frac{1}{2}(1+\cos\beta)^2 & \frac{1}{2}(1-\cos\beta)^2 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^2\beta & \frac{1}{2}(1-\cos\beta)^2 & \frac{1}{2}(1+\cos\beta)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I^{\rm in} \\ Q_+^{\rm in} \\ Q_-^{\rm in} \\ V^{\rm in} \end{pmatrix} \tag{6.278}$$

となる．

ここに得られた偏極散乱行列は，図 6.7 のように，1 回ごとの散乱過程に依存する座標系で記述されている．多数の散乱を扱うためには，これを一般の座標系で表現する必要がある．そのためには，最初に任意の座標系で記述したストークス・パラメータを，入射波が z 軸方向へ進む座標系に変換する．次に上の偏極散乱行列を適用して，散乱波のストークス・パラメータに変換する．そして最後に散乱波のストークス・パラメータを元の座標系に変換し直す，という手順を実行すればよい．この手順において，座標系の変換においては，式 (6.262) もしくは式 (6.268) のように，偏極面が回転するときストークス・パラメータが変換を受ける．上の手順を具体的に実行するため，以下ではしばらく数学的な準備を行う．

6.5.3 球面上のスピン関数とスピン昇降演算子

電磁波の進む向きは単位球面上の点として表現することができ，偏極の自由度を含むストークス・パラメータは，その球面上に定義される関数として表される．電磁波の偏極面を回転させたとき，ストークス・パラメータの値は式 (6.262) もしくは式 (6.268) によって変換するのであった．ここでストークス・パラメータ I, V の値は回転変換の不変量であるから偏極面上のスカラー関数である．一方，Q, U の値は回転変換を受けて値が変わるためスカラー関数ではない．

一般に球面上の各点において，その球面に接する接平面上に値のある関数を考えることができる．上で考えた偏極自由度の場合は，電磁波の進行方向がその球面の各点に対応し，偏極面が接平面に対応する．まず，球面上に球座標 (θ, ϕ) を張る．その球面上の各点で動径方向に $\mathbf{e}_3$ という単位ベクトルを考え，接平面方向へは $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ という 2 つの直交する単位ベクトルを考える．これら 3 つの単位ベクトルは，球面上の各点に定義される 3 次元直交基底になっている．

ここで接平面の基底である $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ を，$\mathbf{e}_3$ の正の方向（$\mathbf{e}_3$ の方向から見て反時計回り）に角度 ψ だけ回転すると，

$$\mathbf{e}_1 \to \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 \cos\psi + \mathbf{e}_2 \sin\psi \tag{6.279}$$

$$\mathbf{e}_2 \to \mathbf{e}'_2 = -\mathbf{e}_1 \sin\psi + \mathbf{e}_2 \cos\psi \tag{6.280}$$

と変換する．ここで接平面の基底を

$$\mathbf{e}_\pm \equiv \frac{\mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_2}{\sqrt{2}} \tag{6.281}$$

によって表示しなおす．この基底 $\mathbf{e}_\pm$ を**ヘリシティ基底** (helicity basis) という．ここで $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 1, \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0$ により，ヘリシティ基底は

$$\mathbf{e}_\pm \cdot \mathbf{e}_\pm = 0, \quad \mathbf{e}_\pm \cdot \mathbf{e}_\mp = 1 \tag{6.282}$$

を満たす．式 (6.279), (6.280) の変換をヘリシティ基底で表すと，

$$\mathbf{e}_\pm \to \mathbf{e}'_\pm = e^{\mp i\psi}\mathbf{e}_\pm \tag{6.283}$$

となる．

いま球面上の各点に定義される関数 ${}_sf(\theta,\phi)$ を考える．各点における接平面の基底を式 (6.279), (6.280) または式 (6.283) のように回転するとき，

$${}_sf \to {}_sf' = e^{-is\psi}{}_sf \tag{6.284}$$

と変換するものとする．このとき，関数の左下につけた添字 s をこの関数のスピンと呼ぶ．基底 $\mathbf{e}_\pm$ はそれぞれスピンが ±1 のように振る舞う．この定義と式 (6.268) により，任意の座標系で電磁波の進行方向を球面上の点に対応させたとき，ストークス・パラメータ I, V はスピン 0 を持ち，$Q_\pm$ はそれぞれスピン ±2 を持つ球面上の関数である．球面上で 0 でないスピンを持つ関数は，通常の球面調和関数 $Y_l^m(\theta,\phi)$ で展開することは不適当である．なぜなら，球面調和関数は球面上のスカラー関数として定義されているからである．球面上でスピンを持つ直交関数として便利なものが，以下に定義するスピン球面調和関数である．

スピン球面調和関数を導入する準備として，球面上に定義されたスピン s の関数 ${}_sf(\theta,\phi)$ に作用する 2 つの演算子 $\eth, \bar{\eth}$ を

$$\eth\,{}_sf \equiv -\sqrt{2}(\mathbf{e}_+)^a\left[\partial_a - s(\mathbf{e}_-)^b\nabla_a(\mathbf{e}_+)_b\right]{}_sf \tag{6.285}$$

$$\bar{\eth}\,{}_sf \equiv -\sqrt{2}(\mathbf{e}_-)^a\left[\partial_a + s(\mathbf{e}_+)^b\nabla_a(\mathbf{e}_-)_b\right]{}_sf \tag{6.286}$$

で定義する．ただし a, b は 2 次元球面座標 (θ,ϕ) の座標添字で，∇_a は 2 次元球面上での共変微分である．重要な性質として，演算子 $\eth$ はスピンの値を 1 だけ大きくし，演算子 $\bar{\eth}$ はスピンの値を 1 だけ小さくする働きがある．すなわちスピン昇降演算子になっている．実際，基底を角度 ψ だけ回転させたときの変換式 (6.283), (6.284) を上式に代入すれば，

$$\eth\,{}_sf \to (\eth\,{}_sf)' = e^{-i(s+1)\psi}\eth\,{}_sf \tag{6.287}$$

$$\bar{\eth}\,{}_sf \to \left(\bar{\eth}\,{}_sf\right)' = e^{-i(s-1)\psi}\bar{\eth}\,{}_sf \tag{6.288}$$

となることが確かめられる．この変換において一般に $\partial_a\psi = \nabla_a\psi$ はゼロでないが，それらは打ち消し合うように式 (6.285), (6.286) が構成されている．

上に定義したスピン昇降演算子 $\eth, \bar{\eth}$ は，接平面の直交基底 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ の選び方によらない一般的なものである．具体的な微分演算子として求めるためには，基底を選んで固定する必要がある．球面座標 (θ, ϕ) における自然な直交基底は，各座標値が増える方向にとった単位ベクトル $\mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi$ である．そこでこれらを基底 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ に選ぶ．すなわち，ヘリシティ基底を

$$\mathbf{e}_\pm \equiv \frac{\mathbf{e}_\theta \pm i\mathbf{e}_\phi}{\sqrt{2}} \tag{6.289}$$

とする．球面座標系 (θ, ϕ) の 2 次元計量は

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2 \tag{6.290}$$

であり，$(\mathbf{e}_\theta)_a(\mathbf{e}_\theta)^a = (\mathbf{e}_\phi)_a(\mathbf{e}_\phi)^a = 1$, $(\mathbf{e}_\theta)_a(\mathbf{e}_\phi)^a = 0$ であることから，基底の共変成分は $(\mathbf{e}_\theta)_a = (1, 0)$, $(\mathbf{e}_\phi)_a = (0, \sin\theta)$ で与えられる．したがって式 (6.289) をこの座標系で表した共変成分と反変成分は

$$[(\mathbf{e}_\pm)_a] = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, \pm i\sin\theta), \quad [(\mathbf{e}_\pm)^a] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1, \frac{\pm i}{\sin\theta}\right) \tag{6.291}$$

となる．また，式 (6.290) の計量から計算される 2 次元クリストッフェル記号 Γ^a_{bc} でゼロでない成分は

$$\Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta, \quad \Gamma^\phi_{\theta\phi} = \Gamma^\phi_{\phi\theta} = \cot\theta \tag{6.292}$$

だけである．これらの式を用いて具体的に共変微分の成分を計算することにより，

$$[\nabla_\theta(\mathbf{e}_\pm)_a] = (0, 0), \quad [\nabla_\phi(\mathbf{e}_\pm)_a] = \mp i\cos\theta\,(\mathbf{e}_\pm)_a \tag{6.293}$$

が得られる．これら成分表示の式 (6.291), (6.293) を式 (6.285), (6.286) へ代入することにより，

$$\eth\,{}_s f = -\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{i}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} - s\cot\theta\right){}_s f = -\sin^s\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{i}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\left(\frac{{}_s f}{\sin^s\theta}\right) \tag{6.294}$$

$$\bar{\eth}\,{}_s f = -\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{i}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} + s\cot\theta\right){}_s f = -\frac{1}{\sin^s\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{i}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)({}_s f\sin^s\theta) \tag{6.295}$$

が得られ，球面座標による具体的な微分演算子で表される．上の表式により，これらの微分演算子は

$$\left(\bar{\eth}\eth - \eth\bar{\eth}\right){}_s f = 2s\,{}_s f \tag{6.296}$$

という性質を持つことが直接確かめられる．また，それぞれスピン s, $s-1$ を持つ

関数 ${}_s f$, ${}_{s-1}g$ について，部分積分を用いて示されるように，

$$\int \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, ({}_s f)^*\, ð\, ({}_{s-1}g) = -\int \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, \left(\bar{ð}\, {}_s f\right)^* ({}_{s-1}g) \tag{6.297}$$

が成り立つ．

6.5.4 スピン球面調和関数

上に構成されたスピン昇降演算子を球面調和関数に繰り返し作用させると，任意の整数スピン s の関数を球面調和関数の微分によって作ることができる．そこで**スピン球面調和関数** (spin-weighted spherical harmonics) を

$$ {}_sY_l^m(\theta,\phi) \equiv \begin{cases} \sqrt{\dfrac{(l-s)!}{(l+s)!}}\, ð^s Y_l^m(\theta,\phi) & (0 \le s \le l) \\ (-1)^{-|s|}\sqrt{\dfrac{(l-|s|)!}{(l+|s|)!}}\, \bar{ð}^{|s|} Y_l^m(\theta,\phi) & (-l \le s \le 0) \\ 0 & (|s| > l) \end{cases} \tag{6.298}$$

により定義する*11．特別な場合として $s=0$ のときは通常の球面調和関数に一致するので，

$$ {}_0Y_l^m = Y_l^m \tag{6.299}$$

である．スピン昇降演算子の性質から，スピン球面調和関数 ${}_sY_l^m$ はスピン s を持つ球面上の関数であることが明らかである．定義からただちに導かれるように，

$$ ð\, {}_sY_l^m = \sqrt{(l-s)(l+s+1)}\ {}_{s+1}Y_l^m \tag{6.300}$$

$$ \bar{ð}\, {}_sY_l^m = -\sqrt{(l+s)(l-s+1)}\ {}_{s-1}Y_l^m \tag{6.301}$$

$$ \bar{ð}ð\, {}_sY_l^m = -(l-s)(l+s+1)\ {}_sY_l^m \tag{6.302}$$

$$ ð\bar{ð}\, {}_sY_l^m = -(l-s+1)(l+s)\ {}_sY_l^m \tag{6.303}$$

が成り立つ．

いま $s>0$ として，式 (6.297) に ${}_sf = {}_sY_l^m$, ${}_{s-1}g = {}_{s-1}Y_{l'}^{m'}$ を代入してから式 (6.300), (6.301) を用いると，

---

*11 E. Newman and R. Penrose, *J. Math. Phys.*, **7**, 863 (1966); J. N. Goldberg *et al.*, *J. Math. Phys.*, **8**, 2155 (1967); T. Dray, *J. Math. Phys.*, **26**, 1030 (1985); G. F. Torres del Castillo, *3-D Spinors, Spin-weighted Functions and their Applications* (Birkhäuser, Boston, 2003).

$$\int \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, {}_sY_l^{m*}(\theta,\phi)\, {}_sY_{l'}^{m'}(\theta,\phi)$$
$$= \sqrt{\frac{(l+s)(l-s+1)}{(l'+s)(l'-s+1)}} \int \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, {}_{s-1}Y_l^{m*}(\theta,\phi)\, {}_{s-1}Y_{l'}^{m'}(\theta,\phi) \quad (6.304)$$

という関係式が得られる．この関係式を s 回繰り返して適用すると，通常の球面調和関数の直交関係の式 (B.72) に帰着するので，左辺は $\delta_{mm'}\delta_{ll'}$ に比例することがわかる．このとき右辺の積分の前の係数は 1 となる．こうしてスピン球面調和関数の直交関係

$$\int \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, {}_sY_l^{m*}(\theta,\phi)\, {}_sY_{l'}^{m'}(\theta,\phi) = \delta_{mm'}\delta_{ll'} \quad (6.305)$$

が得られる．この関係は $s<0$ の場合も同様に示すことができ，式 (6.305) はすべての $-l \le s \le l$ について成り立つ．この直交関係により，スピン s を持つ球面上の関数 ${}_sf$ をスピン球面調和関数で展開して

$${}_sf(\theta,\phi) = \sum_{l=s}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m} {}_sf_{lm}\, {}_sY_l^m(\theta,\phi) \quad (6.306)$$

とすると，その展開係数は

$${}_sf_{lm} = \int \sin\theta\, d\theta\, d\phi\, {}_sY_l^{m*}(\theta,\phi)\, {}_sf(\theta,\phi) \quad (6.307)$$

で与えられる．

スピン球面調和関数に対する具体的な表式の 1 つとして

$${}_sY_l^m(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\, e^{im\phi} \sum_{r=\max(0,m+s)}^{\min(l+s,l+m)} \frac{(-1)^{r-s}\sqrt{(l+s)!\,(l-s)!\,(l+m)!\,(l-m)!}}{r!\,(r-s-m)!\,(l+s-r)!\,(l+m-r)!}$$
$$\times \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2l+s+m-2r} \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2r-s-m} \quad (6.308)$$

がある．この式は帰納法により証明できる．実際，上の表式が式 (6.300), (6.301) を満たすことは直接確かめられ，さらに $s=0$ の場合は球面調和関数の具体的表式 (B.70) に等しい．スピン球面調和関数の満たすいろいろな性質は付録 B.14 に掲げてある．

上の具体的表式 (6.297) と回転行列の具体的表式 (B.87), (B.89) を比較すると，スピン球面調和関数は回転行列に関係していることがわかる．実際，オイラー角 (α,β,γ) に対応する SO(3) の $2l+1$ 次元表現行列である回転行列を $D^l_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma)$ と

すると，

$$
{}_sY_l^m(\theta,\phi) \equiv (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\, D^l_{-m,s}(\phi,\theta,0) \tag{6.309}
$$

が成り立つ．回転行列は，式 (B.86), (B.87) にあるように

$$
D^l_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma) = \langle lm' \,| D(\alpha,\beta,\gamma) |\, lm \rangle = e^{-im'\alpha} d^l_{m'm}(\beta) e^{-im\gamma} \tag{6.310}
$$

で与えられる．ここで $D(\alpha,\beta,\gamma)$ は回転演算子である．また角運動量演算子を $\boldsymbol{J} = (J_x, J_y, J_z)$ とするとき，$|lm\rangle$ は 2 つの演算子 $\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{J}$ と J_z の同時固有状態である．回転演算子の具体形は式 (B.85)，すなわち

$$
D(\alpha,\beta,\gamma) = e^{-i\alpha J_z} e^{-i\beta J_y} e^{-i\gamma J_z} \tag{6.311}
$$

で与えられる．さらに $d^l_{m'm}(\theta) = \left\langle lm' \left| e^{-i\theta J_y} \right| lm \right\rangle$ の具体形は式 (B.89) に与えられる．その他，回転行列 $D^l_{m'm}$ のいろいろな性質は付録 B.12 に掲げてある*12．式 (6.309) と (6.310) によれば，回転行列をスピン球面調和関数で表すことができて

$$
\begin{aligned}
D^l_{m'm}(\phi,\theta,\psi) &= (-1)^{m'} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\, {}_mY_l^{-m'}(\theta,\phi) e^{-im\psi} \\
&= (-1)^m \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\, {}_{-m}Y_l^{m'*}(\theta,\phi) e^{-im\psi}
\end{aligned} \tag{6.312}
$$

となる．スピン球面調和関数の直交関係式 (6.305) は回転行列の直交性 (B.95) から導くこともできる．

ここでスピン球面調和関数の重要な性質として，加法定理を導いておく．まず，球面上に図 6.8 のような幾何学的配置を考える．この図において，オイラー角 $(\phi,\theta,0)$ により座標軸を回転させると，z 軸が最初の座標値 (θ,ϕ) の方向へ移動し，x 軸はこの点の緯度方向へ向く．引き続いてオイラー角 $(\alpha,\beta,-\gamma)$ により座標軸を回転させると，z 軸は座標値 (θ',ϕ') の方向へ移動し，x 軸はこの点の緯度方向へ向く．最後にオイラー角 $(0,-\theta',-\phi')$ により座標軸を回転させると，z 軸は一番最初の方向である $(0,0)$ へ戻り，さらに x 軸も一番最初の方向へ戻る．したがって，この一連の操作は何もしない回転に等しい．したがって，オイラー角で表した回転演算子について

*12　回転行列の詳細についてはたとえば次の文献が参考になる：M.E. ローズ『角運動量の基礎理論』（山内恭彦，森田正人訳，みすず書房，1971）．回転行列の記号法には異なるものがいくつかあるが，本書の記号法はこの文献と一致させてある．

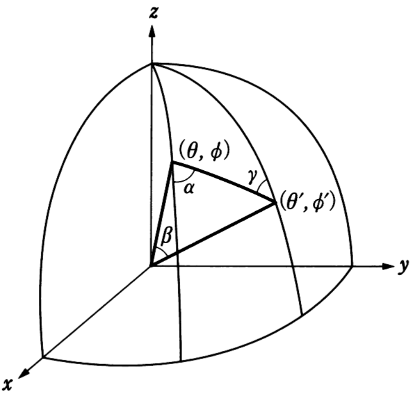


図 6.8 スピン球面調和関数の加法定理，および一般座標におけるトムソン散乱角の関係を説明する図．

$$D(\phi,\theta,0)\,D(\alpha,\beta,-\gamma)\,D(0,-\theta',-\phi') = 1 \tag{6.313}$$

が成り立つ*[13]．

ここでオイラー角 $(0,-\theta',-\phi')$ は $(\phi',\theta',0)$ の逆回転であるから，$D(0,-\theta',-\phi') = D^{-1}(\phi',\theta',0)$ である．さらに回転演算子はユニタリ演算子 $D^{-1} = D^{\dagger}$ であることを用いて式 (6.313) を変形すると

$$D^{\dagger}(\phi,\theta,0)\,D(\phi',\theta',0) = D(\alpha,\beta,-\gamma) \tag{6.314}$$

が得られる．この関係式の両辺について $\langle ls_1|\cdots|ls_2\rangle$ という行列要素をとり，その結果を式 (6.310) の回転行列で表すと，

$$\sum_m D^{l*}_{-m,s_1}(\phi,\theta,0)\,D^{l}_{-m,s_2}(\phi',\theta',0) = D^{l}_{s_1 s_2}(\alpha,\beta,-\gamma) \tag{6.315}$$

となる．ここで回転行列をスピン球面調和関数で表す関係式 (6.312) を用いて変形すると，スピン球面調和関数に関する加法定理

$$\sum_m {}_{s_1}Y_l^{m*}(\theta,\phi)\,{}_{s_2}Y_l^{m}(\theta',\phi') = (-1)^{s_1}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\,{}_{s_2}Y_l^{-s_1}(\beta,\alpha)\,e^{is_2\gamma} \tag{6.316}$$

が得られる．

---

*13 回転の表現論でよく知られているように，動く座標軸に基づいて回転を合成する操作は，座標軸を固定した回転を逆の順序で合成することに等価である．この性質により，式 (6.289) ではオイラー角に基づく回転の操作の順序と演算子の作用する順序が逆になっている．

ここで再び，球面上に定義されたスピン s の関数 ${}_sf$ に対する展開式 (6.306) を考え，その展開係数を ${}_sf_{lm}$ とする．以下では，球面座標の変換に対して，この展開係数がどう変換するかを考える．図 6.8 において，z 軸を座標値 (θ,ϕ) の方向へ向ける座標変換を考える．ただし，新しい座標の x 軸は元の座標の緯度方向を赤道へ向かう向きにとる．このとき，最初に座標値 (θ',ϕ') を持っていた点は，新しい座標値 (β,α) へ変換される．新しい座標で表した関数 ${}_sf$ の値を ${}_s\tilde{f}$ とすると，この座標変換における関数の変換は

$$ {}_s\tilde{f}(\beta,\alpha) = e^{-is\gamma}\,{}_sf(\theta',\phi') \tag{6.317} $$

である．ただし γ は図 6.8 に示される角度である．変換先の座標基底が元の座標基底に対して反時計回りに角度 γ だけ回転しているため，式 (6.284) の変換則が適用されて上の変換式には因子 $e^{-is\gamma}$ がついている．

加法定理の式 (6.316) は，式 (6.312) を用いることにより，

$$ {}_sY_l^m(\beta,\alpha)\,e^{is\gamma} = \sum_{m'} {}_sY_l^{m'}(\theta',\phi')D^l_{m'm}(\phi,\theta,0) \tag{6.318} $$

と変形できる．展開式

$$ {}_sf(\theta',\phi') = \sum_{l,m} {}_sf_{lm}\,{}_sY_l^m(\theta',\phi'), \quad {}_s\tilde{f}(\beta,\alpha) = \sum_{l,m} {}_s\tilde{f}_{lm}\,{}_sY_l^m(\beta,\alpha) \tag{6.319} $$

を式 (6.317) へ代入して両辺を比較し，スピン球面調和関数の直交性 (6.305) あるいは回転行列の直交性 (B.93) を用いることにより，

$$ {}_sf_{lm} = \sum_{m'} D^l_{mm'}(\phi,\theta,0)\,{}_s\tilde{f}_{lm'}, \quad {}_s\tilde{f}_{lm} = \sum_{m'} D^{l*}_{m'm}(\phi,\theta,0)\,{}_sf_{lm'} \tag{6.320} $$

が得られる．これが，スピンを持つ関数の展開係数に対する座標変換の性質である．

ここで，回転行列の還元公式 (B.97) から導かれる便利な関係を求めておく．まず，式 (6.309) を用いてこの還元公式をスピン球面調和関数で表すと，

$$ \begin{aligned} {}_{s_1}Y_{l_1}^{m_1}(\theta,\phi)\,{}_{s_2}Y_{l_2}^{m_2}(\theta,\phi) &= \frac{\sqrt{(2l_1+1)(2l_2+1)}}{4\pi} \\ &\times \sum_{l,m,s} \langle l_1,-m_1;l_2,-m_2|l,m\rangle\langle l_1,s_1;l_2,s_2|l,s\rangle\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\,{}_sY_l^m(\theta,\phi) \end{aligned} \tag{6.321} $$

となる．ただし，クレブシュ-ゴーダン係数 $\left\langle l_1,m_1';l_2,m_2'\middle|l,m'\right\rangle$ は $m_1'+m_2'=m'$

を満たすときだけゼロでないので，上式における m, s の和には $m = -m_1 - m_2$, $s = s_1+s_2$ となる項しか残らず，実質的な和は l についてだけである．さらに l_1, l_2, l は 3 角不等式を満たすときだけゼロでないため，l の和の範囲は $|l_1-l_2| \le l \le l_1+l_2$ である．

式 (6.321) においてとくに $s_1 = m_1 = 0$ の場合を考える．式 (B.68) により，ルジャンドル多項式 $P_l(x)$ を用いて $Y_l^0(\theta,\phi) = \sqrt{(2l+1)/(4\pi)}P_l(\cos\theta)$ と表されるから，

$$P_{l_1}(\cos\theta)\,{}_sY_{l_2}^m(\theta,\phi) = \sum_{l=|l_1-l_2|}^{l_1+l_2} \sqrt{\frac{2l_2+1}{2l+1}}\,\langle l_1,0;l_2,-m|\,l,-m\rangle\,\langle l_1,0;l_2,s|\,l,s\rangle\;{}_sY_l^m(\theta,\phi) \tag{6.322}$$

が成り立つ．この公式は第 10 章で用いる．

6.5.5 トムソン散乱におけるストークス・パラメータの変化率

上に導入したスピン球面調和関数を用いて，トムソン散乱における偏極自由度の変化を記述する*14．図 6.8 において，入射波が (θ,ϕ) の方向，散乱波が (θ',ϕ') の方向を向いているものとする．散乱面は原点とこの 2 点を含む面である．偏極面の座標基底は，各座標値の増える方向へ向いた単位ベクトル $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\phi$ とする．一方，式 (6.278) における偏極散乱行列は，散乱面を基準にして定義した図 6.7 の座標系で表されている．そこで，図 6.8 における一般の座標で表現したストークス・パラメータを，散乱面の座標に変換してからトムソン散乱行列を適用し，その後また一般の座標系へ戻すという手順により，一般の球座標におけるトムソン散乱行列を得ることができる．

式 (6.278) において，回転偏極を表すストークス・パラメータ V は他のパラメータ I, $Q_\pm$ と独立である．そこで

$$\vec{T}^{\rm in} \equiv \begin{pmatrix} I^{\rm in} \\ Q_+^{\rm in} \\ Q_-^{\rm in} \end{pmatrix}, \quad \vec{T}^{\rm sc} \equiv r^2 \begin{pmatrix} I^{\rm sc} \\ Q_+^{\rm sc} \\ Q_-^{\rm sc} \end{pmatrix} \tag{6.323}$$

および

*14 U. Seljak and M. Zaldarriaga, *Phys. Rev. Lett.*, **78**, 2054 (1997); W. Hu and M. White, *Phys. Rev. D*, **56**, 596 (1997).

表 6.1 スピン 0 および 2 に対する 4 重極 ($l=2$) のスピン球面調和関数

m	$Y_2^m(\theta,\phi)$	${}_2Y_2^m(\theta,\phi)$	${}_{-2}Y_2^m(\theta,\phi)$
0	$\sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\theta-1)$	$\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta$	$\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta$
±1	$\mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\, e^{\pm i\phi}$	$-\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\sin\theta(1\mp\cos\theta)\, e^{\pm i\phi}$	$\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\sin\theta(1\pm\cos\theta)\, e^{\pm i\phi}$
±2	$\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta\, e^{\pm 2i\phi}$	$\sqrt{\frac{5}{64\pi}}(1\mp\cos\theta)^2\, e^{\pm 2i\phi}$	$\sqrt{\frac{5}{64\pi}}(1\pm\cos\theta)^2\, e^{\pm 2i\phi}$

$$S(\beta)\equiv\begin{pmatrix}1+\cos^2\beta & -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^2\beta & -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^2\beta\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^2\beta & \frac{1}{2}(1+\cos\beta)^2 & \frac{1}{2}(1-\cos\beta)^2\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^2\beta & \frac{1}{2}(1-\cos\beta)^2 & \frac{1}{2}(1+\cos\beta)^2\end{pmatrix} \tag{6.324}$$

と定義すると，トムソン散乱行列の $I, Q_\pm$ の部分は

$$\vec{T}^{\mathrm{sc}}=\frac{3\sigma_{\mathrm{T}}}{16\pi}S(\beta)\,\vec{T}^{\mathrm{in}} \tag{6.325}$$

と表される．ここで $\vec{T}^{\mathrm{sc}}$ は散乱点を中心とする単位球面上で定義される単位立体角あたりのストークス・パラメータで，半径 r には依存しない．図 6.8 において (θ,ϕ) 方向を向いている入射波について，偏極面座標の基底 $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\phi$ を正の向き（入射波進行方向に見て時計回り）に角度 α だけ回転させると，それらが図 6.7 における E_x^{in} の軸と E_y^{in} の軸に一致する．図 6.8 における (θ',ϕ') の点は散乱波の進行方向を表し，図 6.7 における E_x^{sc} の軸は散乱面に沿った方向，E_y^{sc} の軸はそれに垂直な方向を向く．この点において偏極面座標を負の向きに角度 γ だけ回転させると，散乱方向における偏極面座標の基底 $\mathbf{e}_\theta$, $\mathbf{e}_\phi$ に対するストークス・パラメータが得られる．以上の座標回転を散乱行列の前後に適用すれば，一般座標における表現が得られる．偏極面における基底を正の向きに回転させるときのストークス・パラメータの変換は式 (6.268) であったから，

$$R(\psi)\equiv\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & e^{-2i\psi} & 0\\ 0 & 0 & e^{2i\psi}\end{pmatrix} \tag{6.326}$$

とおくことにより，一般座標におけるストークス・パラメータ $I, Q_\pm$ の散乱による変化は

$$\vec{T}^{\rm sc} = \frac{3\sigma_{\rm T}}{16\pi} R(-\gamma) S(\beta) R(\alpha) \vec{T}^{\rm in} \tag{6.327}$$

となる．

ここに現れる行列の積を具体的に求めた後，表 6.1 に掲げたスピン球面調和関数の具体的な関数形を用いると，

$$R(-\gamma) S(\beta) R(\alpha)$$
$$= \sqrt{\frac{16\pi}{45}} \begin{pmatrix} Y_2^0(\beta,\alpha) + \sqrt{5/\pi} & -\sqrt{3}\,Y_2^{-2}(\beta,\alpha) & -\sqrt{3}Y_2^2(\beta,\alpha) \\ -\sqrt{3}\,{}_2Y_2^0(\beta,\alpha)e^{2i\gamma} & 3\,{}_2Y_2^{-2}(\beta,\alpha)e^{2i\gamma} & 3\,{}_2Y_2^2(\beta,\alpha)e^{2i\gamma} \\ -\sqrt{3}\,{}_{-2}Y_2^0(\beta,\alpha)e^{-2i\gamma} & 3\,{}_{-2}Y_2^{-2}(\beta,\alpha)e^{-2i\gamma} & 3\,{}_{-2}Y_2^2(\beta,\alpha)e^{-2i\gamma} \end{pmatrix} \tag{6.328}$$

という形に変形することができる．スピン球面調和関数に対する加法定理の式 (6.316) を用いれば，式 (6.327) を入射波の方向 $\Omega = (\theta, \phi)$ と散乱波の方向 $\Omega' = (\theta', \phi')$ により表すことができる．ここで次の 3×3 行列

$$P^{(m)}(\Omega', \Omega)$$
$$\equiv \begin{bmatrix} Y_2^m(\Omega')Y_2^{m*}(\Omega) & -\sqrt{3}Y_2^m(\Omega')\,{}_2Y_2^{m*}(\Omega) & -\sqrt{3}Y_2^m(\Omega')\,{}_{-2}Y_2^{m*}(\Omega) \\ -\sqrt{3}\,{}_2Y_2^m(\Omega')Y_2^{m*}(\Omega) & 3\,{}_2Y_2^m(\Omega')\,{}_2Y_2^{m*}(\Omega) & 3\,{}_2Y_2^m(\Omega')\,{}_{-2}Y_2^{m*}(\Omega) \\ -\sqrt{3}\,{}_{-2}Y_2^m(\Omega')Y_2^{m*}(\Omega) & 3\,{}_{-2}Y_2^m(\Omega')\,{}_2Y_2^{m*}(\Omega) & 3\,{}_{-2}Y_2^m(\Omega')\,{}_{-2}Y_2^{m*}(\Omega) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} Y_2^m(\Omega') \\ -\sqrt{3}\,{}_2Y_2^m(\Omega') \\ -\sqrt{3}\,{}_{-2}Y_2^m(\Omega') \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_2^{m*}(\Omega) & -\sqrt{3}\,{}_2Y_2^{m*}(\Omega) & -\sqrt{3}\,{}_{-2}Y_2^{m*}(\Omega) \end{bmatrix} \tag{6.329}$$

を定義すると，式 (6.327) は加法定理により

$$\vec{T}^{\rm sc}(\Omega', \Omega) = \frac{\sigma_{\rm T}}{4\pi} \begin{bmatrix} I^{\rm in}(\Omega) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\sigma_{\rm T}}{10} \sum_{m=-2}^{2} P^{(m)}(\Omega', \Omega) \vec{T}^{\rm in}(\Omega) \tag{6.330}$$

という形になる．この式は，入射波が方向 Ω に入って散乱波が方向 Ω' へ出て行くときの，単位立体角あたりのストークス・パラメータを表している．右辺の第 1 項は等方的な散乱の成分に対応し，第 2 項が非等方的な散乱の成分に対応する．

ストークス・パラメータ V については，トムソン散乱において他のパラメータとは独立であり，また偏極面の座標にも依存しないので簡単である．式 (6.278) および上と同様の計算により，式 (6.330) に対応して

$$r^2 V^{\mathrm{sc}}(\Omega', \Omega) = \frac{\sigma_{\mathrm{T}}}{2} \sum_{m=-1}^{1} Y_1^{m*}(\Omega') Y_1^m(\Omega) V^{\mathrm{in}}(\Omega) \tag{6.331}$$

が得られる．

ここまではトムソン散乱の素過程を取り扱ってきた．これをもとにして，偏極自由度の時間発展に対する統計的な取り扱いを考える．まず，角座標 Ω を進行方向とする電磁波について，単位体積，単位立体角あたりのストークス・パラメータの値が $I(\Omega)$, $Q_\pm(\Omega)$, $V(\Omega)$ となるように規格化しておく．このとき $I(\Omega)$ は振動数で積分した輝度に等しい．また，空間中に電子が数密度 n_{e} で分布しているものとする．ここでは電子の静止系で考える．いま光速を 1 とする自然単位系を用いているから，単位面積を通過する電磁波は単位時間あたりに n_{e} 個の電子と相互作用する．電磁波が方向 Ω' に散乱されると，その方向へのストークス・パラメータが増加する．電磁波の重ね合わせに対するストークス・パラメータの加法性により，式 (6.330) で与えられる $\vec{T}^{\mathrm{sc}}(\Omega', \Omega)$ を入射波の方向 Ω について立体角積分をした量は，方向 Ω' へ進む電磁波のストークス・パラメータに対する増加率を与える．式 (6.331) についても同様である．

ここで各ストークス・パラメータ $I, Q_\pm, V$ をまとめて X という記号で表し，式 (6.330), (6.331) の左辺に現れる各ストークス・パラメータの立体角あたりの増加率を $X^{\mathrm{sc}}(\Omega', \Omega)$ とまとめて表す．上の考察により，ある方向 Ω' へのストークス・パラメータは単位時間あたり

$$\left.\frac{dX(\Omega')}{dt}\right|_+ = n_{\mathrm{e}} \int d\Omega\, X^{\mathrm{sc}}(\Omega', \Omega) \tag{6.332}$$

だけ増加する．一方，最初に Ω 方向を向いていた電磁波については，散乱によりそのストークス・パラメータが減少する．その減少分は単位時間あたり

$$\left.\frac{dX(\Omega)}{dt}\right|_- = n_{\mathrm{e}} \sigma_{\mathrm{T}} X(\Omega) \tag{6.333}$$

となる．ここでもストークス・パラメータの加法性を用いた．したがって，方向 Ω に対する実質的な変化率は，

$$\left.\frac{dX(\Omega)}{dt}\right|_{\mathrm{T}} = \left.\frac{dX(\Omega)}{dt}\right|_+ - \left.\frac{dX(\Omega)}{dt}\right|_- \tag{6.334}$$

で与えられる．

ここで単位立体角あたりのストークス・パラメータをスピン球面調和関数により展開して，

$$I(\Omega) = \sum_{l,m} (-i)^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\, I_l^{(m)} Y_l^m(\Omega) \tag{6.335}$$

$$Q_\pm(\Omega) = \sum_{l,m} (-i)^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\, Q_l^{\pm(m)}\ {}_{\pm2}Y_l^m(\Omega) \tag{6.336}$$

$$V(\Omega) = \sum_{l,m} (-i)^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\, V_l^{(m)} Y_l^m(\Omega) \tag{6.337}$$

とする．スピン球面調和関数の直交関係式 (6.305) により，これらの展開係数は

$$I_l^{(m)} = i^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \int d\Omega\, Y_l^{m*}(\Omega) I(\Omega) \tag{6.338}$$

$$Q_l^{\pm(m)} = i^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \int d\Omega\ {}_{\pm2}Y_l^{m*}(\Omega) Q_\pm(\Omega) \tag{6.339}$$

$$V_l^{(m)} = i^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \int d\Omega\, Y_l^{m*}(\Omega) V(\Omega) \tag{6.340}$$

で与えられる．さらに直線偏極の展開係数について

$$E_l^{(m)} \equiv \frac{Q_l^{+(m)} + Q_l^{-(m)}}{\sqrt{2}}, \quad B_l^{(m)} \equiv \frac{Q_l^{+(m)} - Q_l^{-(m)}}{\sqrt{2}\, i} \tag{6.341}$$

という変数を定義する．このとき

$$Q_l^{\pm(m)} = \frac{E_l^{(m)} \pm i B_l^{(m)}}{\sqrt{2}} \tag{6.342}$$

が成り立つ．

式 (6.330), (6.331) を式 (6.332) の被積分関数へ代入してから上の展開を適用すると，式 (6.334) により，

$$\left.\frac{dI}{dt}\right|_{\mathrm{T}} = n_{\mathrm{e}}\sigma_{\mathrm{T}} \left[-I(\Omega) + I_0^{(0)} - \frac{1}{5}\sqrt{\frac{\pi}{5}} \sum_{m=-2}^{2} \left(I_2^{(m)} - \sqrt{6} E_2^{(m)} \right) Y_2^m(\Omega) \right] \tag{6.343}$$

$$\left.\frac{dQ_\pm}{dt}\right|_{\mathrm{T}} = n_{\mathrm{e}}\sigma_{\mathrm{T}} \left[-Q_\pm(\Omega) + \frac{1}{5}\sqrt{\frac{3\pi}{5}} \sum_{m=-2}^{2} \left(I_2^{(m)} - \sqrt{6} E_2^{(m)} \right) {}_{\pm2}Y_2^m(\Omega) \right] \tag{6.344}$$

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{\mathrm{T}} = n_{\mathrm{e}}\sigma_{\mathrm{T}} \left[-V(\Omega) - i\sqrt{\frac{\pi}{3}} \sum_{m=-1}^{1} V_1^{(m)} Y_1^m(\Omega) \right] \tag{6.345}$$

が得られる．これらが，トムソン散乱による各ストークス・パラメータの変化率

を，電子の静止系における一般の角度座標で与える式である．後の章では，偏極自由度の時間発展を記述するのにこの式が大事な役割を果たす．

第7章

線形摂動論

一様等方宇宙モデルの枠内では，実際の宇宙に存在する豊富な構造を説明できない．宇宙に構造が形成されるためには，エネルギー密度などに空間的なゆらぎが必要である．そこでゆらぎの時間進化を調べることが重要になってくるが，これを一般的に調べることは難しい問題である．なぜなら，一般にゆらぎの時間発展は非線形方程式にしたがい，解析的な一般解を求めることができないからである．だが，初期の宇宙や大スケールの宇宙に着目すると，そこでの密度ゆらぎは小さい．そのような領域ではゆらぎの非線形項を無視できるため，線形近似による解析が可能になる．本章では，宇宙論的なゆらぎの線形近似による取り扱いを述べる．

7.1　アインシュタイン方程式の線形近似

7.1.1　時空間の線形摂動

一様等方性の条件を課さなければ，計量 $g_{\mu\nu}$ は時空間の関数としてどんな形を持っていてもよい．いま，一般の計量テンソルを一様等方成分 $\bar{g}_{\mu\nu}$ とそれ以外の非一様等方成分 $h_{\mu\nu}$ に分解して

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{7.1}$$

と表す．ここで一様等方成分 $\bar{g}_{\mu\nu}$ はロバートソン-ウォーカー計量で与えられる．この章では時間座標として式 (2.10) で定義される共形時間 τ を使う．一様等方時空の計量であるロバートソン-ウォーカー計量は式 (2.11) に与えられるように，

$$ds^2 = a^2(\tau)\left(-d\tau^2 + \gamma_{ij}dx^i dx^j\right) \tag{7.2}$$

となる．ここで γ_{ij} は一様等方 3 次元計量で，球座標表示では式 (2.4) または (2.8)

のように与えられる．

計量の一様等方成分 $\bar{g}_{\mu\nu}$ はアインシュタイン方程式の解である．ここに非一様成分を付け加えた式 (7.1) の形をアインシュタイン方程式へ代入して，非一様等方成分 $h_{\mu\nu}$ について解けば，非一様等方宇宙の進化を表す計量が得られることになる．だが，非一様等方成分について一般解を求めることは，アインシュタイン方程式の一般解を求めることと同等であり，それでは一様等方成分を分離する意味がない．この分離に意味があるのは，一様等方性からのずれが十分に小さい場合である．計量に対する非一様成分の絶対値が十分に小さく $h_{\mu\nu}$ を摂動とみなすことができるとき，これについて 2 次以上の積をすべて無視するという線形近似を適用する．これにより，一様等方性からのずれが小さい宇宙におけるアインシュタイン方程式の近似解を求めることが可能になる．以下では，計量 $\bar{g}_{\mu\nu}$ を持つ一様等方時空のことを**背景時空** (background spacetime) と呼び，摂動を含んだ計量 $g_{\mu\nu}$ を持つ非一様等方時空のことを**摂動時空** (perturbed spacetime) と呼ぶ．摂動時空と背景時空の違いは小さいものと考える．

計量の摂動成分 $h_{\mu\nu}$ から

$$h_{00} = -2a^2 A, \quad h_{0i} = -a^2 B_i, \quad h_{ij} = 2a^2 C_{ij} \tag{7.3}$$

により定義される変数 A, B_i, C_{ij} を導入すると便利である．これらの変数の添字 i, j は，一様等方 3 次元計量 γ_{ij} で上げ下げするものと約束する．すなわち，

$$B^i \equiv \gamma^{ij} B_j, \quad C^i{}_j \equiv \gamma^{ik} C_{kj}, \quad C_i{}^j \equiv \gamma^{jk} C_{ik}, \quad C^{ij} \equiv \gamma^{ik}\gamma^{jl} C_{kl} \tag{7.4}$$

である．すると，摂動宇宙の計量は

$$ds^2 = a^2(\tau)\left[-(1+2A)d\tau^2 - 2B_i d\tau dx^i + (\gamma_{ij} + 2C_{ij})\, dx^i dx^j\right] \tag{7.5}$$

で与えられる．具体的に計量 $g_{\mu\nu}$ の成分で表すと，

$$g_{00} = -a^2(1+2A), \quad g_{0i} = -a^2 B_i, \quad g_{ij} = a^2\left(\gamma_{ij} + 2C_{ij}\right) \tag{7.6}$$

である．以下では，計量の摂動 A, B_i, C_{ij} の絶対値が十分小さいとして線形近似を適用し，2 次以上の項をつねに無視する．このとき計量の逆行列 $g^{\mu\nu}$ を求めると，

$$g^{00} = -\frac{1}{a^2}(1-2A), \quad g^{0i} = -\frac{1}{a^2}B^i, \quad g^{ij} = \frac{1}{a^2}\left(\gamma^{ij} - 2C^{ij}\right) \tag{7.7}$$

が得られる．

クリストッフェル記号 $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ の定義式 (1.124) に上の摂動計量を代入して線形近似

を適用すれば，直線的な計算により

$$\Gamma^0_{00} = \mathscr{H} + A' \tag{7.8}$$

$$\Gamma^0_{0i} = \Gamma^0_{i0} = A_{|i} - \mathscr{H} B_i \tag{7.9}$$

$$\Gamma^0_{ij} = \mathscr{H}(1-2A)\gamma_{ij} + \frac{1}{2}\left(B_{i|j} + B_{j|i}\right) + C_{ij}' + 2\mathscr{H} C_{ij} \tag{7.10}$$

$$\Gamma^i_{00} = A^{|i} - (B^i)' - \mathscr{H} B^i \tag{7.11}$$

$$\Gamma^i_{0j} = \Gamma^i_{j0} = \mathscr{H}\delta^i_j + \frac{1}{2}\left(B_j{}^{|i} - B^i{}_{|j}\right) + C^i{}_j{}' \tag{7.12}$$

$$\Gamma^i_{jk} = {}^{(3)}\Gamma^i_{jk} + \mathscr{H} B^i \gamma_{jk} + C^i{}_{j|k} + C^i{}_{k|j} - C_{jk}{}^{|i} \tag{7.13}$$

が得られる．ただしいくつか記号法の説明が必要である．まず，式 (2.13) のようにプライム (′) は共形時間についての微分 $d/d\tau$ を表す．また共形時間に関するハッブル・パラメータ $\mathscr{H}$ は

$$\mathscr{H} \equiv \frac{a'}{a} = aH \tag{7.14}$$

で定義される．通常のハッブル・パラメータは $H = \dot{a}/a$ である．さらに ${}^{(3)}\Gamma^i_{jk}$ は一様等方 3 次元空間計量 γ_{ij} についての 3 次元クリストッフェル記号で，

$${}^{(3)}\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}\gamma^{il}\left(\partial_j\gamma_{kl} + \partial_k\gamma_{jl} - \partial_l\gamma_{jk}\right) \tag{7.15}$$

により定義される．このクリストッフェル記号は背景時空のものであるから，そこから作られる 3 次元曲率テンソルは式 (2.14) で与えられる形

$${}^{(3)}R_{ijkl} = K\left(\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk}\right) \tag{7.16}$$

である．また，添字の前に書いた縦棒記号は，一様等方 3 次元計量 γ_{ij} に関する 3 次元共変微分 ${}^{(3)}\nabla_i$ を表す．すなわち，$X^{\cdots}_{\cdots}$ を任意の 3 次元テンソルとするとき

$$X^{\cdots}_{\cdots|i} = {}^{(3)}\nabla_i X^{\cdots}_{\cdots} \tag{7.17}$$

である．

ここで，式 (1.222) のような共変微分の交換関係は，3 次元空間の共変微分と曲率テンソルについても成り立つ．たとえば，3 次元テンソル $X^i{}_j$ の共変微分に対して微分の順序を交換すると，

$$X^k{}_{l|ji} - X^k{}_{l|ij} = {}^{(3)}R^k{}_{mij}X^m{}_l - {}^{(3)}R^m{}_{lij}X^k{}_m \tag{7.18}$$

のようにおつりの項が出てくる．ここでテンソル $X^i{}_j$ が線形摂動であれば，線形近似の範囲でここに現れる 3 次元曲率テンソル ${}^{(3)}R^i{}_{jkl}$ に背景時空の式 (7.16) を代入してよい．このような計算は以下で頻繁に用いる．

次に，クリストッフェル記号の式 (7.8)–(7.13) を曲率テンソル $R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}$ の定義式 (1.208) に代入して，線形近似で計算すれば，

$$R^0{}_{00i} = -\mathscr{H}' B_i, \qquad R^0{}_{0ij} = 0, \qquad R^\mu{}_{\nu 00} = 0 \tag{7.19}$$

$$\begin{aligned} R^0{}_{i0j} = {} & \mathscr{H}'\gamma_{ij}(1-2A) - \mathscr{H}\gamma_{ij}A' - A_{|ij} \\ & + B_{(i|j)}{}' + \mathscr{H}B_{(i|j)} + C_{ij}{}'' + \mathscr{H}C_{ij}{}' + 2\mathscr{H}'C_{ij} \end{aligned} \tag{7.20}$$

$$\begin{aligned} R^i{}_{00j} = {} & \mathscr{H}'\delta^i_j - A^{|i}{}_{|j} - \mathscr{H}\delta^i_j A' \\ & + \frac{1}{2}\left(B^i{}_{|j} + B_{|j}{}^i\right)' + \frac{1}{2}\mathscr{H}\left(B^i{}_{|j} + B_{|j}{}^i\right) + C^i{}_j{}'' + \mathscr{H}C^i{}_j{}' \end{aligned} \tag{7.21}$$

$$R^0{}_{ijk} = 2\mathscr{H}\gamma_{i[j}A_{|k]} - B_{i|[jk]} + \frac{1}{2}\left(B_{k|ij} - B_{j|ik}\right) - 2C_{i[j|k]}{}' \tag{7.22}$$

$$R^i{}_{0jk} = 2\mathscr{H}\delta^i_{[j}A_{|k]} - 2\mathscr{H}^2\delta^i_{[j}B_{k]} + B^i{}_{|[jk]} - B_{[j}{}^{|i}{}_{|k]} - 2C^i{}_{[j|k]}{}' \tag{7.23}$$

$$\begin{aligned} R^i{}_{j0k} = {} & \mathscr{H}\left(\gamma_{jk}A^{|i} - \delta^i_k A_{|j}\right) + \mathscr{H}^2\left(\delta^i_k B_j - \gamma_{jk}B^i\right) \\ & + \mathscr{H}'\gamma_{jk}B^i + \frac{1}{2}\left(B^i{}_{|jk} - B_j{}^{|i}{}_{|k}\right) + \left(C^i{}_{k|j} - C_{jk}{}^{|i}\right)' \end{aligned} \tag{7.24}$$

$$\begin{aligned} R^i{}_{jkl} = {} & 2\left[K + \mathscr{H}^2(1-2A)\right]\delta^i_{[k}\gamma_{l]j} + \mathscr{H}\left(\delta^i_k B_{(j|l)} - \delta^i_l B_{(j|k)} - \gamma_{j[k}B^i{}_{|l]} - \gamma_{j[k}B_{l]}{}^{|i}\right) \\ & + 2\mathscr{H}\left(\delta^i_{[k}C_{l]j} + \gamma_{j[l}C^i{}_{k]}\right)' + 4\mathscr{H}^2\delta^i_{[k}C_{l]j} - 2C^i{}_{j|[kl]} + C^i{}_{l|jk} - C^i{}_{k|jl} + 2C_{j[k}{}^{|i}{}_{|l]} \end{aligned} \tag{7.25}$$

が得られる．ただし，添字の前後に現れる丸括弧記号は式 (1.27) のように添字の置換について対称化することを意味し，角括弧記号は式 (1.28) のように添字の置換について反対称化することを意味する．また，上に現れない添字の組み合わせを持つ曲率テンソルは，対称性の式 (1.214), (1.215) により与えられる．

上に得られた曲率テンソルを縮約してリッチ・テンソル $R_{\mu\nu} = R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu}$ を求めると，

$$R_{00} = -3\mathscr{H}' + \Delta A + 3\mathscr{H} A' - B^i{}_{|i}{}' - \mathscr{H} B^i{}_{|i} - C^i{}_i{}'' - \mathscr{H} C^i{}_i{}' \tag{7.26}$$

$$R_{0i} = 2\mathscr{H} A_{|i} - \left(2\mathscr{H}^2 + \mathscr{H}'\right) B_i + \frac{1}{2} B_{i|j}{}^{|j} - \frac{1}{2} B^j{}_{|ij} + 2C^j{}_{[i|j]}{}' \tag{7.27}$$

$$\begin{aligned} R_{ij} = &\left[2K + \left(2\mathscr{H}^2 + \mathscr{H}'\right)(1-2A) - \mathscr{H} A'\right]\gamma_{ij} - A_{|ij} \\ &+ B_{(i|j)}{}' + 2\mathscr{H} B_{(i|j)} + \mathscr{H}\gamma_{ij} B^k{}_{|k} + C_{ij}{}'' + 2\mathscr{H} C_{ij}{}' + \mathscr{H}\gamma_{ij} C^k{}_k{}' \\ &+ 2\left(2\mathscr{H}^2 + \mathscr{H}'\right) C_{ij} + 2C^k{}_{(i|j)k} - C^k{}_{k|ij} - C_{ij|k}{}^{|k} \end{aligned} \tag{7.28}$$

となる．ただし $\Delta A = A_{|i}{}^{|i}$ は 3 次元ラプラシアンを表す．さらに最初の添字を上げたリッチ・テンソル $R^\mu{}_\nu$ を求めれば，

$$a^2 R^0{}_0 = 3\mathscr{H}'(1-2A) - \Delta A - 3\mathscr{H} A' + B^i{}_{|i}{}' + \mathscr{H} B^i{}_{|i} + C^i{}_i{}'' + \mathscr{H} C^i{}_i{}' \tag{7.29}$$

$$a^2 R^0{}_i = -2\mathscr{H} A_{|i} - 2K B_i - \frac{1}{2} B_{i|j}{}^{|j} + \frac{1}{2} B^j{}_{|ij} - 2C^j{}_{[i|j]}{}' \tag{7.30}$$

$$a^2 R^i{}_0 = 2\mathscr{H} A^{|i} - 2\left(\mathscr{H}^2 - \mathscr{H}'\right) B^i + \frac{1}{2} B^{i|j}{}_{|j} - \frac{1}{2} B_j{}^{|ij} + 2C_j{}^{[i|j]\prime} \tag{7.31}$$

$$\begin{aligned} a^2 R^i{}_j = &\left[2K + \left(2\mathscr{H}^2 + \mathscr{H}'\right)(1-2A) - \mathscr{H} A' + \mathscr{H} B^k{}_{|k} + \mathscr{H} C^k{}_k{}'\right]\delta^i_j \\ &- A^{|i}{}_{|j} + \frac{1}{2}\left(B^i{}_{|j} + B_j{}^{|i}\right)' + \mathscr{H}\left(B^i{}_{|j} + B_j{}^{|i}\right) + C^i{}_j{}'' \\ &+ 2\mathscr{H} C^i{}_j{}' - 4K C^i{}_j + C^{ki}{}_{|jk} + C_{kj}{}^{|ik} - C_k{}^{k|i}{}_{|j} - C^i{}_{j|k}{}^{|k} \end{aligned} \tag{7.32}$$

が得られる．さらにこの式を縮約することにより，スカラー曲率 $R = R^\mu{}_\mu$ は

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{2} R = &\, 3K + 3\left(\mathscr{H}^2 + \mathscr{H}'\right)(1-2A) - \Delta A - 3\mathscr{H} A' + B^i{}_{|i}{}' + 3\mathscr{H} B^i{}_{|i} \\ &+ C^i{}_i{}'' + 3\mathscr{H} C^i{}_i{}' - 2K C^i{}_i + C^{ij}{}_{|ji} - C^i{}_{i|j}{}^{|j} \end{aligned} \tag{7.33}$$

で与えられる．式 (7.29)-(7.33) によって，アインシュタイン・テンソル $G^\mu{}_\nu = R^\mu{}_\nu - \delta^\mu{}_\nu R/2$ の線形近似は，

$$a^2 G^0{}_0 = -3K - 3\mathscr{H}^2(1-2A) - 2\mathscr{H} B^i{}_{|i} - 2\mathscr{H} C^i{}_i{}' + 2K C^i{}_i - C^{ij}{}_{|ji} + C^i{}_{i|j}{}^{|j} \tag{7.34}$$

$$a^2 G^0{}_i = -2\mathscr{H} A_{|i} - 2K B_i - \frac{1}{2} B_{i|j}{}^{|j} + \frac{1}{2} B^j{}_{|ij} - 2C^j{}_{[i|j]}{}' \tag{7.35}$$

$$a^2 G^i{}_0 = 2\mathscr{H} A^{|i} - 2\left(\mathscr{H}^2 - \mathscr{H}'\right) B^i + \frac{1}{2} B^{i|j}{}_{|j} - \frac{1}{2} B_j{}^{|ij} + 2C_j{}^{[i|j]\prime} \tag{7.36}$$

$$\begin{aligned} a^2 G^i{}_j = &\left[-K - \left(\mathscr{H}^2 + 2\mathscr{H}'\right)(1-2A) + 2\mathscr{H} A' + \Delta A - B^k{}_{|k}{}' - 2\mathscr{H} B^k{}_{|k} \right. \\ &\left. - C^k{}_k{}'' - 2\mathscr{H} C^k{}_k{}' + 2K C^k{}_k - C^{kl}{}_{|lk} + C^k{}_{k|l}{}^{|l}\right]\delta^i_j \\ &- A^{|i}{}_{|j} + \frac{1}{2}\left(B^i{}_{|j} + B_j{}^{|i}\right)' + \mathscr{H}\left(B^i{}_{|j} + B_j{}^{|i}\right) + C^i{}_j{}'' + 2\mathscr{H} C^i{}_j{}' \\ &- 4K C^i{}_j + C^{ki}{}_{|jk} + C_{kj}{}^{|ik} - C_k{}^{k|i}{}_{|j} - C^i{}_{j|k}{}^{|k} \end{aligned} \tag{7.37}$$

となる．

7.1.2 エネルギー運動量テンソルの線形摂動

以上によりアインシュタイン方程式の左辺であるアインシュタイン・テンソルの線形近似が導かれたので，次に，右辺であるエネルギー運動量テンソルの線形近似を導く．一般に曲がった時空間におけるエネルギー運動量テンソルは式 (1.225) で与えられる．後ろの添字を下げたものは，

$$T^\mu{}_\nu = (\rho + p)u^\mu u_\nu + p\,\delta^\mu_\nu + \sigma^\mu{}_\nu \tag{7.38}$$

と表される．ここで u^μ は流体素片の 4 元速度，$\sigma^\mu{}_\nu$ は非等方応力テンソルである．非等方応力テンソルは，流体の静止系で空間成分のみを持つトレースゼロの対称テンソルである．すなわち，

$$\sigma^{\mu\nu}u_\nu = 0, \quad g_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} = 0, \quad \sigma^{\mu\nu} = \sigma^{\nu\mu} \tag{7.39}$$

を満たす．

4 元速度 u^μ は規格化条件 $u^\mu u_\mu = -1$ を満たすので，その自由度は 3 である．そこで，3 成分の空間的速度 $v^i = u^i/u^0$ を独立自由度に選ぶ．背景時空の 4 元速度は，等方性を満たすために時間成分しか持たない．したがって v^i は背景時空でゼロであり，それ自身が摂動量である．規格化条件 $u^\mu u_\mu = -1$ により 4 元速度の他の成分を決めることができ，線形近似では

$$u^\mu = a^{-1}\left(1 - A, v^i\right) \tag{7.40}$$

$$u_\mu = a\,(-1 - A, v_i - B_i) \tag{7.41}$$

という形になる．非等方応力テンソルも背景時空でゼロであるから，それ自身が摂動量である．このため，線形近似では式 (7.39) における $u_\nu, g_{\mu\nu}$ に背景時空の量を代入してよい．すると

$$\sigma^{00} = \sigma^{0i} = \sigma^{i0} = 0, \quad \gamma_{ij}\sigma^{ij} = 0, \quad \sigma^{ij} = \sigma^{ji} \tag{7.42}$$

が得られる．さらに，線形近似では片方の添字を背景時空の計量 $\bar{g}_{\mu\nu}$ で下げることもできて，

$$\sigma^0{}_0 = \sigma^0{}_i = \sigma^i{}_0 = 0, \quad \sigma^i{}_i = 0, \quad \sigma^i{}_j = \sigma_j{}^i \tag{7.43}$$

が導かれる．

以上の式を用いると，エネルギー運動量テンソルの式 (7.38) に対する線形近似は

$$T^0{}_0 = -\rho \tag{7.44}$$

$$T^0{}_i = (\rho + p)(v_i - B_i) \tag{7.45}$$

$$T^i{}_0 = -(\rho + p)v^i \tag{7.46}$$

$$T^i{}_j = p\delta^i_j + \sigma^i{}_j \tag{7.47}$$

と表される．ここで，エネルギー密度のゆらぎ δ と圧力のゆらぎ δp を

$$\delta = \frac{\rho - \bar{\rho}}{\bar{\rho}}, \quad \delta p = p - \bar{p} \tag{7.48}$$

で定義する．また非等方応力テンソル $\sigma^i{}_j$ を圧力 p によって無次元化した量

$$\Pi^i{}_j = \frac{\sigma^i{}_j}{p} \tag{7.49}$$

を定義する．この 3 次元テンソルはトレースなしの対称テンソルであり，それ自身が摂動量である．これらの量を用いてエネルギー運動量テンソルの式 (7.44)-(7.47) を表すと，

$$T^0{}_0 = -\bar{\rho} - \bar{\rho}\delta \tag{7.50}$$

$$T^0{}_i = (\bar{\rho} + \bar{p})(v_i - B_i) \tag{7.51}$$

$$T^i{}_0 = -(\bar{\rho} + \bar{p})v^i \tag{7.52}$$

$$T^i{}_j = \bar{p}\delta^i_j + \delta p\, \delta^i_j + \bar{p}\Pi^i{}_j \tag{7.53}$$

が得られる．

7.1.3 アインシュタイン方程式の摂動展開

一般に宇宙項を含むアインシュタイン方程式 (1.240) は，アインシュタイン・テンソル $G^\mu{}_\nu$ を用いて

$$G^\mu{}_\nu + \Lambda\delta^\mu{}_\nu = 8\pi G T^\mu{}_\nu \tag{7.54}$$

と表すことができる．式 (7.34)-(7.37) のアインシュタイン・テンソル $G^\mu{}_\nu$ と式 (7.50)-(7.53) のエネルギー運動量テンソル $T^\mu{}_\nu$ を上のアインシュタイン方程式へ代入すれば，線形近似のアインシュタイン方程式が得られる．アインシュタイン・

テンソルとエネルギー運動量テンソルを，背景成分 $\bar{G}^{\mu}{}_{\nu}$, $\bar{T}^{\mu}{}_{\nu}$ とそれ以外の成分 $\delta G^{\mu}{}_{\nu}$, $\delta T^{\mu}{}_{\nu}$ に分解して

$$G^{\mu}{}_{\nu} = \bar{G}^{\mu}{}_{\nu} + \delta G^{\mu}{}_{\nu}, \quad T^{\mu}{}_{\nu} = \bar{T}^{\mu}{}_{\nu} + \delta T^{\mu}{}_{\nu} \tag{7.55}$$

とする．背景成分はそれ自身がアインシュタイン方程式の解となるように構成されるので，

$$\bar{G}^{\mu}{}_{\nu} + \Lambda\delta^{\mu}{}_{\nu} = 8\pi G\bar{T}^{\mu}{}_{\nu} \tag{7.56}$$

を満たす．この式をもとのアインシュタイン方程式 (7.54) から差し引けば，摂動成分のアインシュタイン方程式は

$$\delta G^{\mu}{}_{\nu} = 8\pi G\delta T^{\mu}{}_{\nu} \tag{7.57}$$

となる．線形近似では，両辺ともに摂動の 1 次の量，すなわち線形摂動量である．宇宙項には摂動成分がないので，摂動成分の方程式には現れない．

7.1.4 背景時空のアインシュタイン方程式

背景時空のアインシュタイン方程式 (7.56) の主な性質は，2.3.1 項で導かれた．以下の便利のため，ここで再びその性質をまとめておく．線形化したアインシュタイン・テンソルの式 (7.34)-(7.37) から背景成分を取り出せば，

$$\bar{G}^{0}{}_{0} = -\frac{3}{a^2}\left(\mathscr{H}^2 + K\right), \quad \bar{G}^{i}{}_{0} = \bar{G}^{0}{}_{i} = 0, \quad \bar{G}^{i}{}_{j} = -\frac{1}{a^2}\left(2\mathscr{H}' + \mathscr{H}^2 + K\right)\delta^i_j \tag{7.58}$$

が得られる．また，線形化したエネルギー運動量テンソルの式 (7.50)-(7.53) から背景成分を取り出すと，

$$\bar{T}^{0}{}_{0} = -\bar{\rho}, \quad \bar{T}^{i}{}_{0} = \bar{T}^{0}{}_{i} = 0, \quad \bar{T}^{i}{}_{j} = \bar{p}\delta^i_j \tag{7.59}$$

となる．これらを背景成分のアインシュタイン方程式 (7.56) へ代入すれば，2 つの独立な式

$$\mathscr{H}^2 = \frac{8\pi G}{3}a^2\bar{\rho} + \frac{\Lambda}{3}a^2 - K \tag{7.60}$$

$$\mathscr{H}' = -\frac{4\pi G}{3}a^2(\bar{\rho} + 3\bar{p}) + \frac{\Lambda}{3}a^2 \tag{7.61}$$

が導かれる．また背景成分についてのエネルギー運動量保存則 $\bar{T}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ は

$$\bar{\rho}' = -3\mathcal{H}(\bar{\rho} + \bar{p}) \tag{7.62}$$

となる．この式はアインシュタイン方程式と独立ではなく，式 (7.60), (7.61) から導くこともできる．

ここで時間依存する密度パラメータ Ω と状態方程式パラメータ w および音速パラメータ ${c_s}^2$ を

$$\Omega \equiv \frac{8\pi G a^2 \bar{\rho}}{3\mathcal{H}^2}, \qquad w \equiv \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}}, \qquad {c_s}^2 = \frac{\bar{p}'}{\bar{\rho}'} \tag{7.63}$$

で定義する．一般に音速の 2 乗は断熱変化のもとでの微分 $(\partial p/\partial \rho)_S$ で与えられる．特殊な状況を除けば式 (2.59) はゼロになって背景時空は断熱的に膨張するので，上式の c_s は音速に対応する量である．上に導入した時間依存するパラメータを用いると，式 (7.60)–(7.62) は

$$\mathcal{H}^2 = \mathcal{H}^2 \Omega + \frac{\Lambda}{3} a^2 - K \tag{7.64}$$

$$\mathcal{H}' = -\frac{1}{2}\mathcal{H}^2 \Omega (1 + 3w) + \frac{\Lambda}{3} a^2 \tag{7.65}$$

$$w' = -3\mathcal{H}(1 + w)\left({c_s}^2 - w\right) \tag{7.66}$$

と表される．さらに式 (7.61) を微分することにより，

$$\frac{\mathcal{H}''}{\mathcal{H}} = \frac{4\pi G}{3} a^2 \bar{\rho} \left[1 - 3w + 9(1 + w){c_s}^2\right] + \frac{2}{3}\Lambda a^2 \tag{7.67}$$

が導かれる．ここで，式 (7.60), (7.61), (7.67) を組み合わせると，関係式

$$\mathcal{H}^2 + K - \mathcal{H}' = 4\pi G a^2 (\bar{\rho} + \bar{p}) = \frac{3}{2}\mathcal{H}^2 \Omega (1 + w) \tag{7.68}$$

$$\mathcal{H}'' - \mathcal{H}\left(\mathcal{H}^2 + K + \mathcal{H}'\right) = -4\pi G a^2 \bar{p}' = \frac{9}{2}\mathcal{H}^3 \Omega (1 + w){c_s}^2 \tag{7.69}$$

が得られる．これらの式は，以下で摂動量の方程式を変形するときに用いる．

7.1.5 線形アインシュタイン方程式

線形摂動量に対するアインシュタイン方程式を導く．アインシュタイン・テンソルの式 (7.34)–(7.37) とエネルギー運動量テンソルの式 (7.50)–(7.53) から線形摂動項を取り出して，摂動アインシュタイン方程式 (7.57) へ代入する．ここでアインシュタイン方程式の $({}^0{}_i)$ 成分と $({}^i{}_0)$ 成分は等価な情報を持つので，ここでは $({}^0{}_i)$ 成分のみを用いる．また $({}^i{}_j)$ 成分のアインシュタイン方程式 $\delta G^i{}_j = 8\pi G \delta T^i{}_j$ は，ト

レース成分とトレースなし成分に分解することで

$$\delta G^i{}_i = 8\pi G \delta T^i{}_i, \quad \delta G^i{}_j - \frac{1}{3}\delta^i_j \delta G^k{}_k = 8\pi G\left(\delta T^i{}_j - \frac{1}{3}\delta^i_j \delta T^k{}_k\right) \tag{7.70}$$

の 2 式と等価である．これらのことを用いてアインシュタイン方程式から得られる独立な式を求めると，

$$3\mathscr{H}^2 A - \mathscr{H} B^i{}_{|i} - \mathscr{H} C^i{}_i{}' + K C^i{}_i - \frac{1}{2}C^{ij}{}_{|ji} + \frac{1}{2}C^i{}_{i|j}{}^{|j} = -4\pi G a^2 \bar{\rho}\delta \tag{7.71}$$

$$\mathscr{H} A_{|i} + K B_i + \frac{1}{4}B_{i|j}{}^{|j} - \frac{1}{4}B^j{}_{|ij} + C^j{}_{[i|j]}{}' = -4\pi G a^2 (\bar{\rho} + \bar{p})(v_i - B_i) \tag{7.72}$$

$$\begin{aligned} &3\mathscr{H} A' + 3\left(\mathscr{H}^2 + 2\mathscr{H}'\right)A + \triangle A - B^i{}_{|i}{}' - 2\mathscr{H} B^i{}_{|i} \\ &\qquad - C^i{}_i{}'' - 2\mathscr{H} C^i{}_i{}' + K C^i{}_i - \frac{1}{2}C^{ij}{}_{|ji} + \frac{1}{2}C^i{}_{i|j}{}^{|j} = 12\pi G a^2 \delta p \end{aligned} \tag{7.73}$$

$$\begin{aligned} &\left(\delta^i_k \delta^j_l - \frac{1}{3}\gamma_{kl}\gamma^{ij}\right)\Big(A_{|ij} - B_{(i|j)}{}' - 2\mathscr{H} B_{(i|j)} - C_{ij}{}'' - 2\mathscr{H} C_{ij}{}' + 4K C_{ij} \\ &\qquad + C_{ij|m}{}^{|m} + C^m{}_{m|ij} - 2C_{m(i|j)}{}^{|m}\Big) = -8\pi G a^2 \bar{p}\Pi_{kl} \end{aligned} \tag{7.74}$$

が得られる．式 (7.73) がトレース成分であり，式 (7.74) がトレースなし成分である．

方程式 (7.71)-(7.74) の独立成分の数は $1 + 3 + 1 + 5 = 10$ である．これはもともと，4 次元対称テンソル方程式であるアインシュタイン方程式の独立成分の数が 10 であることと一致する．上式が，線形摂動論における一般的なアインシュタイン方程式である．ただし，次節以下でくわしく述べるように，この方程式には非物理的なゲージ自由度が含まれている．このため，方程式の解を求めるためにはなんらかの方法でゲージ自由度を除去する必要がある．

エネルギー運動量保存則の式 $T^\mu{}_{\nu;\mu} = 0$ はアインシュタイン方程式とは独立ではない．だが，線形摂動に関するその形を書き下しておくと後に有用である．エネルギー運動量テンソルの共変微分

$$T^\mu{}_{\nu;\mu} = T^\mu{}_{\nu,\mu} + \Gamma^\mu_{\mu\lambda}T^\lambda{}_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}T^\mu{}_\lambda \tag{7.75}$$

に式 (7.8)-(7.13) と (7.50)-(7.53) を代入し，線形近似を適用して計算することにより，

$$T^\mu{}_{0;\mu} = -\bar{\rho}' - 3\mathscr{H}(\bar{\rho} + \bar{p}) - (\bar{\rho}\delta)' - 3\mathscr{H}(\bar{\rho}\delta + \delta p) - (\bar{\rho} + \bar{p})\left(v^i{}_{|i} + C^i{}_i{}'\right) \tag{7.76}$$

$$T^\mu{}_{i;\mu} = [(\bar{\rho} + \bar{p})(v_i - B_i)]' + 4\mathscr{H}(\bar{\rho} + \bar{p})(v_i - B_i) + (\bar{\rho} + \bar{p})A_{|i} + \delta p_{|i} + \bar{p}\Pi^j{}_{i|j} \tag{7.77}$$

が得られる．保存則 $T^\mu{}_{\nu;\mu} = 0$ の背景成分をとれば，式 (7.62) ですでに導いた式

$\bar{\rho}' = -3\mathscr{H}(\bar{\rho} + \bar{p})$ が得られる．また，式 (7.63) により $\bar{p}' = c_s{}^2\bar{\rho}'$ である．これらの関係を用いて保存則 $T^\mu{}_{\nu;\mu} = 0$ の線形成分から $\bar{\rho}', \bar{p}'$ を消去すると，

$$\delta' + 3\mathscr{H}w\left(\frac{\delta p}{\bar{p}} - \delta\right) + (1+w)\left(v^i{}_{|i} + C^i{}_i{}'\right) = 0 \tag{7.78}$$

$$(v_i - B_i)' + \mathscr{H}\left(1 - 3c_s{}^2\right)(v_i - B_i) + A_{|i} + \frac{1}{1+w}\left(\frac{\delta p_{|i}}{\bar{\rho}} + w\Pi^j{}_{i|j}\right) = 0 \tag{7.79}$$

という方程式が得られる．ただし，式 (7.63) で定義される変数 $w = \bar{p}/\bar{\rho}$ を用いた．

圧力のゆらぎ δp は，エントロピーゆらぎによって表しておくと便利である．圧力 p をエネルギー密度 ρ と物質あたりのエントロピー S の関数と考えて，状態方程式を $p = p(\rho, S)$ と表す．このとき圧力のゆらぎはエネルギー密度のゆらぎ $\delta\rho = \bar{\rho}\delta$ とエントロピーのゆらぎ δS により，

$$\delta p = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)\bigg|_S \delta\rho + \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)\bigg|_\rho \delta S = c_s{}^2\bar{\rho}\delta + \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)\bigg|_\rho \delta S \tag{7.80}$$

と表される．エントロピーゆらぎを表す無次元量として，

$$\Gamma = \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)\bigg|_\rho \frac{\delta S}{\bar{p}} \tag{7.81}$$

を導入すると，式 (7.80) により

$$\Gamma = \frac{\delta p - c_s{}^2\bar{\rho}\delta}{\bar{p}} = \frac{\delta p}{\bar{p}} - \frac{c_s{}^2}{w}\delta \tag{7.82}$$

となる．圧力ゆらぎ δp の代わりにこのエントロピーゆらぎ Γ を用いると，式 (7.78), (7.79) は

$$\delta' + 3\mathscr{H}\left(c_s{}^2 - w\right)\delta + (1+w)\left(v^i{}_{|i} + C^i{}_i{}'\right) + 3\mathscr{H}w\Gamma = 0 \tag{7.83}$$

$$(v_i - B_i)' + \mathscr{H}\left(1 - 3c_s{}^2\right)(v_i - B_i) + \frac{c_s{}^2}{1+w}\delta_{|i} + A_{|i} + \frac{w}{1+w}\left(\Gamma_{|i} + \Pi^j{}_{i|j}\right) = 0 \tag{7.84}$$

と表される．これらの式はニュートン流体に対する連続の式とオイラー方程式に対応するもので，それらを相対論的に拡張したものになっている．

7.2 ゲージ変換と SVT 分解

7.2.1 ゲージ変換

上で求めた線形摂動の方程式では，最初の式 (7.1) により，計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を一様等方成分 $\bar{g}_{\mu\nu}$ と摂動成分 $h_{\mu\nu}$ に分解した．背景時空と摂動時空で同じ座標値を持つ時空点同士で計量を比較し，その差を摂動成分 $h_{\mu\nu}$ と定義した．このとき背景時空の時空点と摂動時空の時空点を 1 対 1 対応させていることに注意する．この対応関係は一意的でない．摂動時空の座標のとり方によって，比較する時空点に任意性があるからである．摂動時空だけで座標変換する自由度は物理的な自由度ではなく，一般相対論的摂動論におけるゲージ自由度となる．この自由度は時空自体の一般座標変換の自由度とは異なり，背景時空と摂動時空の対応関係が保たれるように両方の座標を変換しても現れない．背景時空の点と摂動時空の点の対応関係に対する自由度という幾何学的な意味を持つのがゲージ自由度である．

このゲージ自由度に対するゲージ変換を具体的に表すため，摂動時空における座標変換

$$x^\mu \to \tilde{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu \tag{7.85}$$

を考える．ここで ξ^μ は計量の摂動と同じ程度の微小量とする．なぜなら，物理的なゆらぎよりも大きくずれた座標を摂動時空に張る必要はないからである．計量は共変テンソルであるから，変換式

$$g_{\mu\nu}(x) \to \tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} g_{\alpha\beta}(x) \tag{7.86}$$

にしたがう．この変換式を用いて，同一の座標値 x を持つ点における計量テンソルの関数形変化を求めると，微小量 ξ^μ の線形近似により

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\nu}(x) &= \tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) - g_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\nu,\alpha}(x)\xi^\alpha \\ &= -g_{\mu\alpha}(x)\xi^\alpha{}_{,\nu} - g_{\nu\alpha}(x)\xi^\alpha{}_{,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha}(x)\xi^\alpha \end{aligned} \tag{7.87}$$

が得られる．式 (1.157) と比較すればわかるように，右辺は $-\xi^\mu$ に沿った計量 $g_{\mu\nu}$ のリー微分である．

式 (7.85) は摂動時空の座標変換であり，背景時空の座標は固定している．したがって，この座標変換は摂動部分にのみ作用する．また，座標変換の量 ξ^μ も摂

動量であるため，線形近似の範囲では，式 (7.87) の右辺に現れる計量 $g_{\mu\nu}$ を背景時空の値 $\bar{g}_{\mu\nu}$ に置き換えてよい．座標変換を時間成分と空間成分に分けて $(\xi^\mu) = (T, L^i)$ と表し，式 (7.87) を時間成分と空間成分ごとに計算すると，線形近似により，

$$A \to \tilde{A} = A - T' - \mathscr{H}T \tag{7.88}$$

$$B_i \to \tilde{B}_i = B_i + L_i' - T_{|i} \tag{7.89}$$

$$C_{ij} \to \tilde{C}_{ij} = C_{ij} - \mathscr{H}T\gamma_{ij} - L_{(i|j)} \tag{7.90}$$

が得られる．ただし，3 次元一様等方空間の計量 γ_{ij} により 3 次元添字の上げ下げと共変微分が定義される．

すべての物理量は，そのテンソル性によってゲージ変換を受ける．エネルギー運動量テンソル $T^\mu{}_\nu$ に対しては，テンソルとしての変換が

$$T^\mu{}_\nu(x) \to \tilde{T}^\mu{}_\nu(\tilde{x}) = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} T^\alpha{}_\beta(x) \tag{7.91}$$

となるから，式 (7.85) の座標変換と線形近似の下で，

$$\tilde{T}^\mu{}_\nu(x) - T^\mu{}_\nu(x) = T^\alpha{}_\nu(x)\xi^\mu{}_{,\alpha} - T^\mu{}_\beta(x)\xi^\beta{}_{,\nu} - T^\mu{}_{\nu,\alpha}(x)\xi^\alpha \tag{7.92}$$

となる．線形近似の範囲では，右辺に現れるエネルギー運動量テンソル $T^\mu{}_\nu$ を背景時空の値 $\bar{T}^\mu{}_\nu$ に置き換えてよい．エネルギー運動量テンソルの具体的な式 (7.50)-(7.53) を上式に代入して，成分ごとに計算することにより，

$$\delta \to \tilde{\delta} = \delta - \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}}T \tag{7.93}$$

$$v_i \to \tilde{v}_i = v_i + L_i' \tag{7.94}$$

$$\delta p \to \tilde{\delta p} = \delta p - \bar{p}'T \tag{7.95}$$

$$\Pi^i{}_j \to \tilde{\Pi}^i{}_j = \Pi^i{}_j \tag{7.96}$$

が得られる．ただし，式 (7.95) は空間座標のトレース成分に対応し，式 (7.96) は非トレース成分に対応する．また，式 (7.82) で与えられるエントロピーゆらぎ Γ のゲージ変換を上の式から求めると，

$$\Gamma \to \tilde{\Gamma} = \Gamma \tag{7.97}$$

となる．すなわち，エントロピーゆらぎはゲージ変換によって値を変えないゲージ不変量である．

計量に対するゲージ変換の式 (7.88)-(7.90) と，エネルギー成分に対するゲージ変換の式 (7.93)-(7.96) を，上に導いた線形アインシュタイン方程式 (7.71)-(7.74) や保存則の式 (7.83), (7.84) に適用すると，方程式の形は不変に保たれる．この性質は，背景時空の式 (7.60), (7.61) および 3 次元共変微分を交換する式 (7.16), (7.18) などを用いて直接的に計算することで示すことができる．物理的な力学的発展を記述する方程式には，当然ながらゲージ自由度を規定する情報は含まれていない．

7.2.2 スカラー・ベクトル・テンソル分解

背景時空の 3 次元空間上で，摂動計量の成分 A は 3 次元スカラー，B_i は 3 次元ベクトル，C_{ij} は 3 次元テンソルとして変換する．これらの量をそのまま扱うよりも，以下に説明する**スカラー・ベクトル・テンソル分解** (scalar-vector-tensor decomposition) を適用すると都合がよい．以下では，スカラー・ベクトル・テンソル分解のことを略して **SVT 分解** (SVT decomposition) と呼ぶ．

SVT 分解とは，各種の摂動量を，スカラー型成分，ベクトル型成分，テンソル型成分の 3 つの成分に分解する方法である．まず，3 次元スカラー量である A は，そのままスカラー型成分に分類される．次にベクトル量である B_i については，スカラー場 $B^{(S)}$ の 3 次元共変微分で表される成分とその他の成分 ${B^{(V)}}_i$ に分解して，

$$B_i = {B^{(S)}}_{|i} + {B^{(V)}}_i \tag{7.98}$$

とする．ここで勾配で表されない成分 ${B^{(V)}}_i$ は発散なしとして，

$$ {B^{(V)}}_i{}^{|i} = 0 \tag{7.99}$$

を満たすものとする．このとき $B^{(S)}$ を B_i のスカラー型成分といい，${B^{(V)}}_i$ を B_i のベクトル型成分という．ベクトル型成分 ${B^{(V)}}_i$ の自由度は $3 - 1 = 2$ である．スカラー型成分 $B^{(S)}$ は方程式

$$\triangle B^{(S)} = B_i{}^{|i} \tag{7.100}$$

を満たす．境界条件が与えられればこの方程式の解は一意的に求まり，さらに ${B^{(V)}}_i$ は $B_i - {B^{(S)}}_{|i}$ で与えられるので，任意の B_i に対して上の分解 (7.98) は一意的に決まる．非局所的な積分で与えられる逆ラプラス演算子 $\triangle^{-1}$ を用いると，具体的に

$$B^{(\mathrm{S})} = \Delta^{-1}\nabla^i B_i\,, \quad B^{(\mathrm{V})}{}_i = B_i - \nabla_i \Delta^{-1}\nabla^j B_j \tag{7.101}$$

によって定められる．3 次元ベクトル場 B_i は時空点あたり 3 自由度を持ち，これが 1 自由度のスカラー型成分 $B^{(\mathrm{S})}$ と 2 自由度のベクトル型成分 $B^{(\mathrm{V})}{}_i$ に分解されている．

同様に対称テンソル量である C_{ij} は，2 つのスカラー場 D, $E^{(\mathrm{S})}$ とベクトル場 $E^{(\mathrm{V})}{}_i$ で表される部分とその他の成分 $E^{(\mathrm{T})}{}_{ij}$ に分解して

$$C_{ij} = \gamma_{ij} D + E^{(\mathrm{S})}{}_{|ij} + E^{(\mathrm{V})}{}_{(i|j)} + E^{(\mathrm{T})}{}_{ij} \tag{7.102}$$

とする*1．ここでベクトル場 $E^{(\mathrm{V})}{}_i$ とテンソル場 $E^{(\mathrm{T})}{}_{ij}$ は条件

$$E^{(\mathrm{V})}{}_i{}^{|i} = 0, \quad E^{(\mathrm{T})}{}_i{}^i = 0, \quad E^{(\mathrm{T})}{}_{ij}{}^{|j} = 0 \tag{7.103}$$

を満たすものとする．ベクトル場 $E^{(\mathrm{V})}{}_i$ の自由度は $3 - 1 = 2$ であり，対称テンソル場 $E^{(\mathrm{T})}{}_{ij}$ の自由度は $6 - 4 = 2$ である．式 (7.102) の分解も一意的であることが，次のように示される．まず，上の条件式 (7.103) により

$$C_i{}^i = 3D + \Delta E^{(\mathrm{S})} \tag{7.104}$$

$$C_{ij}{}^{|j} = D_{|i} + \left[(\Delta + 2K)E^{(\mathrm{S})}\right]_{|i} + \frac{1}{2}E^{(\mathrm{V})}{}_{i|j}{}^{|j} + KE^{(\mathrm{V})}{}_i \tag{7.105}$$

$$C_{ij}{}^{|ji} = \Delta\left(D + \Delta E^{(\mathrm{S})} + 2KE^{(\mathrm{S})}\right) \tag{7.106}$$

が成り立つ．この式を導くとき，式 (7.18) のような関係により，共変微分の順序を交換する操作を行った．任意に与えられるテンソル場 C_{ij} について，式 (7.104), (7.106) を連立させて解けばスカラー型変数 D, $E^{(\mathrm{S})}$ が定まり，さらにその解を式 (7.105) へ代入した方程式からベクトル型変数 $E^{(\mathrm{V})}{}_i$ が定まる．それらの解を式 (7.102) へ代入すればテンソル型変数 $E^{(\mathrm{T})}$ が定まる．具体的には，非局所的な逆演算子 $(\Delta + 2K)^{-1}$, $(\Delta + 3K)^{-1}$ を用いて，

*1　文献によっては $H_{\mathrm{L}} = D + \Delta E^{(\mathrm{S})}/3$, $H_{\mathrm{T}} = E^{(\mathrm{S})}$ という変数もよく用いられる．この変数 H_{L} は計量ゆらぎ C_{ij} に対するトレースの 1/3 倍に等しい．

$$D = \frac{1}{3}C_i{}^i - \frac{1}{2}\Delta(\Delta + 3K)^{-1}\left(\Delta^{-1}\nabla^i\nabla^j C_{ij} - \frac{1}{3}C_i{}^i\right) \tag{7.107}$$

$$E^{(\mathrm{S})} = \frac{3}{2}(\Delta + 3K)^{-1}\left(\Delta^{-1}\nabla^i\nabla^j C_{ij} - \frac{1}{3}C_i{}^i\right) \tag{7.108}$$

$$E^{(\mathrm{V})}{}_i = 2(\Delta + 2K)^{-1}\left(\nabla^j C_{ij} - \nabla_i\Delta^{-1}\nabla^j\nabla^k C_{jk}\right) \tag{7.109}$$

$$E^{(\mathrm{T})}{}_{ij} = C_{ij} - \gamma_{ij}D - E^{(\mathrm{S})}{}_{|ij} - E^{(\mathrm{V})}{}_{(i|j)} \tag{7.110}$$

により定められる．時空点あたり 6 自由度を持つ対称テンソル場 C_{ij} が，2 自由度のスカラー型成分 D, $E^{(\mathrm{S})}$, 2 自由度のベクトル型成分 $E^{(\mathrm{V})}{}_i$, 2 自由度のテンソル型成分 $E^{(\mathrm{T})}{}_{ij}$ に分解されている．

ゲージ変換の変数 (T, L^i) にも同様に SVT 分解が適用できる．時間並進の変数 T はそのままで 3 次元スカラー場である．空間並進の変数 L^i は 3 次元ベクトル場であるから，

$$L_i = L^{(\mathrm{S})}{}_{|i} + L^{(\mathrm{V})}{}_i \tag{7.111}$$

と分解できる．ここで $L^{(\mathrm{V})}{}_i$ は式 (7.99) と同様の条件

$$L^{(\mathrm{V})}{}_i{}^{|i} = 0 \tag{7.112}$$

を満たす．

ゲージ変換の式 (7.88)-(7.90) の各辺に SVT 分解を適用すると，スカラー型，ベクトル型，テンソル型の各成分が独立にゲージ変換するという特徴がある．具体的にスカラー型成分のゲージ変換を求めると，

$$A \to \tilde{A} = A - T' - \mathscr{H}T \tag{7.113}$$

$$B^{(\mathrm{S})} \to \tilde{B}^{(\mathrm{S})} = B^{(\mathrm{S})} + L^{(\mathrm{S})\prime} - T \tag{7.114}$$

$$D \to \tilde{D} = D - \mathscr{H}T \tag{7.115}$$

$$E^{(\mathrm{S})} \to \tilde{E}^{(\mathrm{S})} = E^{(\mathrm{S})} - L^{(\mathrm{S})} \tag{7.116}$$

が得られ，これはスカラー型変数 T, $L^{(\mathrm{S})}$ のみによるゲージ変換を受けている．またベクトル型成分については

$$B^{(\mathrm{V})}{}_i \to \tilde{B}^{(\mathrm{V})}{}_i = B^{(\mathrm{V})}{}_i + L^{(\mathrm{V})}{}_i{}' \tag{7.117}$$

$$E^{(\mathrm{V})}{}_i \to \tilde{E}^{(\mathrm{V})}{}_i = E^{(\mathrm{V})}{}_i - L^{(\mathrm{V})}{}_i \tag{7.118}$$

が得られ，これはベクトル型変数 $L^{(\mathrm{V})}{}_i$ のみによるゲージ変換を受けている．さら

にテンソル型成分については

$$E^{(\mathrm{T})}{}_{ij} \to \tilde{E}^{(\mathrm{T})}{}_{ij} = E^{(\mathrm{T})}{}_{ij} \tag{7.119}$$

が得られ，これはゲージ変換について不変であることがわかる．このように，スカラー型成分，ベクトル型成分，テンソル型成分のそれぞれがお互いに独立にゲージ変換することは，SVT 分解を考える大きな利点である．

エネルギー運動量テンソルには，摂動量として $\delta, \delta p, v_i, \Pi_{ij}$ が含まれる．これらの量についても SVT 分解を適用する．まず，3 次元スカラー量である $\delta, \delta p$ については，そのままでスカラー型成分である．そして，ベクトル量である v_i の分解は

$$v_i = v^{(\mathrm{S})}{}_{|i} + v^{(\mathrm{V})}{}_i \tag{7.120}$$

となる．ここでベクトル型成分は

$$v^{(\mathrm{V})}{}_i{}^{|i} = 0 \tag{7.121}$$

を満たす．次に，非等方応力テンソル Π_{ij} の分解を考えるが，これはトレースなしの対称テンソルである．このことを考慮すると，その分解は

$$\Pi_{ij} = \Pi^{(\mathrm{S})}{}_{|ij} - \frac{1}{3}\gamma_{ij}\Delta\Pi^{(\mathrm{S})} + \Pi^{(\mathrm{V})}{}_{(i|j)} + \Pi^{(\mathrm{T})}{}_{ij} \tag{7.122}$$

となる．ここでベクトル型成分とテンソル型成分は

$$\Pi^{(\mathrm{V})}{}_i{}^{|i} = 0, \quad \Pi^{(\mathrm{T})}{}_i{}^i = 0, \quad \Pi^{(\mathrm{T})}{}_{ij}{}^{|j} = 0 \tag{7.123}$$

を満たす．

この SVT 分解により，ゲージ変換の式 (7.93)–(7.96) を成分ごとに表してみる．まず，スカラー型成分については，

$$\delta \to \tilde{\delta} = \delta - \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}}T \tag{7.124}$$

$$v^{(\mathrm{S})} \to \tilde{v}^{(\mathrm{S})} = v^{(\mathrm{S})} + L^{(\mathrm{S})\prime} \tag{7.125}$$

$$\delta p \to \tilde{\delta p} = \delta p - \bar{p}'T \tag{7.126}$$

$$\Pi^{(\mathrm{S})} \to \tilde{\Pi}^{(\mathrm{S})} = \Pi^{(\mathrm{S})} \tag{7.127}$$

となる．さらにベクトル型成分については，

$$v^{(\mathrm{V})}{}_i \to \tilde{v}^{(\mathrm{V})}{}_i = v^{(\mathrm{V})}{}_i + L^{(\mathrm{V})}{}_i{}' \tag{7.128}$$

$$\Pi^{(\mathrm{V})}{}_i \to \tilde{\Pi}^{(\mathrm{V})}{}_i = \Pi^{(\mathrm{V})}{}_i \tag{7.129}$$

となり，テンソル型成分については，

$$\Pi^{(\mathrm{T})}{}_{ij} \to \tilde{\Pi}^{(\mathrm{T})}{}_{ij} \tag{7.130}$$

となる．ここからわかるように，スカラー型のゲージ変換はスカラー型成分にだけ作用し，同様にベクトル型成分，テンソル型成分においてもそれぞれ独立なゲージ変換をする．すなわち，SVT 分解は摂動変数をゲージ変換についての独立な成分に分解している．

次に，SVT 分解した変数で線形アインシュタイン方程式を表す．そのためには，摂動量の共変微分が式 (7.16) を用いて式 (7.18) のように交換すること，および式 (7.103) を用いて示される関係式

$$B^j{}_{|ij} = B^{(\mathrm{S})}{}_{|i}{}^{|j}{}_{|j} + 2KB^{(\mathrm{V})}{}_i \tag{7.131}$$

$$C^j{}_{[i|j]} = -D_{|i} + KE^{(\mathrm{S})}{}_{|i} + \frac{1}{4}E^{(\mathrm{V})}{}_i{}^{|j}{}_{|j} + \frac{1}{2}KE^{(\mathrm{V})}{}_i \tag{7.132}$$

$$\begin{aligned} C^k{}_{(i|j)k} = D_{|ij} + E^{(\mathrm{S})}{}_{|ij}{}^{|k}{}_{|k} - KE^{(\mathrm{S})}{}_{|ij} + K\gamma_{ij}\Delta E^{(\mathrm{S})} \\ + \frac{1}{2}E^{(\mathrm{V})}{}_{(i|j)}{}^{|k}{}_{|k} + 2KE^{(\mathrm{V})}{}_{(i|j)} + 3KE^{(\mathrm{T})}{}_{ij} \end{aligned} \tag{7.133}$$

$$C^k{}_{k|ij} = 3D_{|ij} + E^{(\mathrm{S})}{}_{|ij}{}^{|k}{}_{|k} - 6KE^{(\mathrm{S})}{}_{|ij} + 2K\gamma_{ij}\Delta E^{(\mathrm{S})} \tag{7.134}$$

を使う．また摂動量の空間平均はゼロなので，任意の変数 X を摂動量とするとき，$X_{|i} = 0$ ならば積分しても $X = 0$ であり，同様に $X_{|ij} - \gamma_{ij}\Delta X/3 = 0$ ならば $X = 0$ であることに注意する．以上の性質を用いて，線形アインシュタイン方程式 (7.71)-(7.74) のスカラー型成分を求めると，

$$3\mathscr{H}^2 A - \mathscr{H}\Delta B^{(\mathrm{S})} - 3\mathscr{H}D' + (\Delta + 3K)D - \mathscr{H}\Delta E^{(\mathrm{S})\prime} = -4\pi Ga^2\bar{\rho}\delta \tag{7.135}$$

$$\mathscr{H}A + KB^{(\mathrm{S})} - D' + KE^{(\mathrm{S})\prime} = -4\pi Ga^2(\bar{\rho} + \bar{p})\left(v^{(\mathrm{S})} - B^{(\mathrm{S})}\right) \tag{7.136}$$

$$\begin{aligned} 3\mathscr{H}A' + 3\left(\mathscr{H}^2 + 2\mathscr{H}'\right)A + \Delta A - \Delta B^{(\mathrm{S})\prime} - 2\mathscr{H}\Delta B^{(\mathrm{S})} - 3D'' - 6\mathscr{H}D' \\ + (\Delta + 3K)D - \Delta E^{(\mathrm{S})\prime\prime} - 2\mathscr{H}\Delta E^{(\mathrm{S})\prime} = 12\pi Ga^2\delta p \end{aligned} \tag{7.137}$$

$$A - B^{(\mathrm{S})\prime} - 2\mathscr{H}B^{(\mathrm{S})} + D - E^{(\mathrm{S})\prime\prime} - 2\mathscr{H}E^{(\mathrm{S})\prime} = -8\pi Ga^2\bar{p}\Pi^{(\mathrm{S})} \tag{7.138}$$

が得られる．また，ベクトル型成分は

$$(\Delta + 2K)B^{(\mathrm{V})}{}_i + (\Delta + 2K)E^{(\mathrm{V})}{}_i{}' = -16\pi Ga^2 (\bar{\rho} + \bar{p})\left(v^{(\mathrm{V})}{}_i - B^{(\mathrm{V})}{}_i\right) \tag{7.139}$$

$$B^{(\mathrm{V})}{}_i{}' + 2\mathscr{H} B^{(\mathrm{V})}{}_i + E^{(\mathrm{V})}{}_i{}'' + 2\mathscr{H} E^{(\mathrm{V})}{}_i{}' = 8\pi Ga^2 \bar{p}\varPi^{(\mathrm{V})}{}_i \tag{7.140}$$

となり，テンソル型成分は

$$E^{(\mathrm{T})}{}_{ij}{}'' + 2\mathscr{H} E^{(\mathrm{T})}{}_{ij}{}' - (\Delta - 2K)\, E^{(\mathrm{T})}{}_{ij} = 8\pi Ga^2 \bar{p}\varPi^{(\mathrm{T})}{}_{ij} \tag{7.141}$$

となる．ただし，$\Delta B^{(\mathrm{V})}{}_i = B^{(\mathrm{V})}{}_i{}^{|j}{}_{|j}$, $\Delta E^{(\mathrm{V})}{}_i = E^{(\mathrm{V})}{}_i{}^{|j}{}_{|j}$, $\Delta E^{(\mathrm{T})}{}_{ij} = E^{(\mathrm{T})}{}_{ij}{}^{|k}{}_{|k}$ であり，3 次元ラプラシアン Δ は添字を含んだテンソル全体へ最後に作用するものとする．

同様に，共変微分の交換で

$$\varPi^j{}_{i|j} = \frac{2}{3}\varPi^{(\mathrm{S})|j}{}_{|ji} + 2K\varPi^{(\mathrm{S})}{}_{|i} + \frac{1}{2}\varPi^{(\mathrm{V})}{}_i{}^{|j}{}_{|j} + K\varPi^{(\mathrm{V})}{}_i \tag{7.142}$$

となることを用いれば，保存則の式 (7.83), (7.84) のスカラー型成分は

$$\delta' + 3\mathscr{H}\left(c_{\mathrm{s}}{}^2 - w\right)\delta + (1 + w)\left(\Delta v^{(\mathrm{S})} + 3D' + \Delta E^{(\mathrm{S})\prime}\right) + 3\mathscr{H} w\varGamma = 0 \tag{7.143}$$

$$\begin{aligned}\left(v^{(\mathrm{S})} - B^{(\mathrm{S})}\right)' + \mathscr{H}\left(1 - 3c_{\mathrm{s}}{}^2\right)\left(v^{(\mathrm{S})} - B^{(\mathrm{S})}\right) + \frac{c_{\mathrm{s}}{}^2}{1 + w}\delta + A& \\ + \frac{w}{1 + w}\left[\varGamma + \frac{2}{3}(\Delta + 3K)\varPi^{(\mathrm{S})}\right] &= 0\end{aligned} \tag{7.144}$$

となり，またベクトル型成分は

$$\left(v^{(\mathrm{V})}{}_i - B^{(\mathrm{V})}{}_i\right)' + \mathscr{H}\left(1 - 3c_{\mathrm{s}}{}^2\right)\left(v^{(\mathrm{V})}{}_i - B^{(\mathrm{V})}{}_i\right) + \frac{w}{2(1 + w)}(\Delta + 2K)\varPi^{(\mathrm{V})}{}_i = 0 \tag{7.145}$$

となる．これらの式はアインシュタイン方程式と独立ではない．

7.3 ゲージ不変摂動論

線形摂動のアインシュタイン方程式 (7.71)–(7.74) はゲージ変換の不変性を持つため，微分方程式として境界条件を与えても，ゲージ自由度の分だけ不定性が残り，解が一意的に求まらない．方程式の解を求める単純な方法として，ゲージ固定条件によってゲージ自由度を取り除いてから，方程式を解くというものがある．ただし，この方法ではゲージに依存する量と依存しない不変量との区別がつきにくいという欠点がある．ゲージに依存しないゲージ不変量だけが物理的な意味を持つため，変数のゲージ依存性がわかるような形で方程式を解くことができると都合がよい．

ゲージ固定をせずに摂動時空のアインシュタイン方程式を解く方法として，ゲー

ジ不変摂動論 (gauge-invariant perturbation theory) と呼ばれる手法が開発されている*2. 以下では，この手法に基づいて線形摂動の発展方程式を扱う．線形アインシュタイン方程式 (7.71)-(7.74) がゲージ変換で不変に保たれることに着目すると，線形アインシュタイン方程式はゲージ依存しない不変量だけで書き表すことができるはずである．ゲージ不変量に関する方程式にはゲージ自由度が現れないので，解が一意的に求まる．すなわち，ゲージ固定をすることなくゲージ不変量について方程式を解くことができる．これがゲージ不変摂動論の考え方である．

7.3.1 ゲージ不変量によるアインシュタイン方程式

ゲージ変換は SVT 分解により独立な成分に分けられるので，ゲージ不変量はそれらの成分ごとに構成することができる．以下では SVT 分解の成分ごとにゲージ不変量の構成法を述べて，対応するアインシュタイン方程式を導出する．

スカラー型摂動

スカラー型摂動計量に対するゲージ変換の式 (7.113)-(7.116) において，空間点ごとに T および $L^{(\mathrm{S})}$ の 2 つのゲージ自由度がある．摂動計量に対するスカラー型成分の変数は A, $B^{(\mathrm{S})}$, D, $E^{(\mathrm{S})}$ の 4 つあるが，そのうち物理的な自由度はゲージ自由度を除いた 2 つである．このことに対応して，2 つの線形独立なゲージ不変量を構成することができる．そのために，スカラー型成分に対するゲージ変換の式 (7.114), (7.116) から得られる，

$$\tilde{B}^{(\mathrm{S})} + \tilde{E}^{(\mathrm{S})\prime} = B^{(\mathrm{S})} + E^{(\mathrm{S})\prime} - T \tag{7.146}$$

$$\tilde{E}^{(\mathrm{S})} = E^{(\mathrm{S})} - L^{(\mathrm{S})} \tag{7.147}$$

という関係式を利用する．変換式 (7.146) を用いて式 (7.113), (7.115) からゲージ自由度 T が打ち消されるような量を考えると，ゲージ変換を受けない不変量として

$$\Phi = A - \left(B^{(\mathrm{S})} + E^{(\mathrm{S})\prime}\right)' - \mathscr{H}\left(B^{(\mathrm{S})} + E^{(\mathrm{S})\prime}\right) \tag{7.148}$$

$$\Psi = D - \mathscr{H}\left(B^{(\mathrm{S})} + E^{(\mathrm{S})\prime}\right) \tag{7.149}$$

---

*2 J. Bardeen, *Phys. Rev.* D, **22**, 1882 (1980); H. Kodama and M. Sasaki, *Prog. Theor. Phys. Supplement*, **78**, 1 (1984); V. F. Mukhanov, H. A. Feldman and R. H. Brandenberger, *Physics Reports*, **215**, 203 (1992).

の 2 つの線形独立な組み合わせが構成できる．もちろん，この 2 変数とその微分などから作られる任意の線形結合はすべてゲージ不変量であり，その選び方は一意的でない．だが，上の量 Φ, Ψ を基本的なゲージ不変量として選ぶと都合がよい．

また，エネルギー成分のスカラー型摂動変数もゲージ不変量でなく，式 (7.124)–(7.127) のゲージ変換を受ける．これらについても同様に，式 (7.146), (7.147) を用いてゲージ依存する項を打ち消すような組み合わせを考えると，

$$\delta^{(\mathrm{GI})} = \delta - \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}}\left(B^{(\mathrm{S})} + E^{(\mathrm{S})\prime}\right) = \delta + 3\mathscr{H}(1+w)\left(B^{(\mathrm{S})} + E^{(\mathrm{S})\prime}\right) \tag{7.150}$$

$$v^{(\mathrm{GI})} = v^{(\mathrm{S})} + E^{(\mathrm{S})\prime} \tag{7.151}$$

$$\delta p^{(\mathrm{GI})} = \delta p - \bar{p}'\left(B^{(\mathrm{S})} + E^{(\mathrm{S})\prime}\right) = \delta p + 3\mathscr{H}\bar{\rho}{c_{\mathrm{s}}}^2(1+w)\left(B^{(\mathrm{S})} + E^{(\mathrm{S})\prime}\right) \tag{7.152}$$

によりゲージ不変量が構成できる．ただし，式 (7.150), (7.152) の 2 番めの表現を導くのに式 (7.62), (7.63) を用いた．非等方応力テンソル $\Pi^{(\mathrm{S})}$ はそのままでゲージ不変であるから，対応するゲージ不変量を定義する必要はない．さらに，式 (7.82) で与えられるエントロピーゆらぎは

$$\Gamma = \frac{\delta p^{(\mathrm{GI})} - {c_{\mathrm{s}}}^2\bar{\rho}\delta^{(\mathrm{GI})}}{\bar{p}} \tag{7.153}$$

と書き表すことができる．この量もそのままでゲージ不変量であることが明らかである．

線形アインシュタイン方程式のスカラー型成分は，ゲージ不変量だけで書き表すことができる．実際，式 (7.148)–(7.152) を用いると，変数 A, D, δ, δp, $v^{(\mathrm{S})}$ はゲージ不変な変数 Φ, Ψ, $\delta^{(\mathrm{GI})}$, $\delta p^{(\mathrm{GI})}$, $v^{(\mathrm{GI})}$ とゲージ依存する変数 $B^{(\mathrm{S})}$, $E^{(\mathrm{S})}$ で表される．それらの表式をスカラー型成分の線形アインシュタイン方程式 (7.135)–(7.138) へ代入すると，ゲージ依存する変数 $B^{(\mathrm{S})}$, $E^{(\mathrm{S})}$ はすべて打ち消し合って，

$$3\mathscr{H}\left(\mathscr{H}\Phi - \Psi'\right) + (\Delta + 3K)\Psi = -4\pi G a^2 \bar{\rho}\delta^{(\mathrm{GI})} \tag{7.154}$$

$$\mathscr{H}\Phi - \Psi' = -4\pi G a^2(\bar{\rho} + \bar{p})v^{(\mathrm{GI})} \tag{7.155}$$

$$\begin{aligned}\Delta\Phi + (\Delta + 3K)\Psi + 3\left(\mathscr{H}^2 + 2\mathscr{H}'\right)\Phi& \\ + 3\mathscr{H}\Phi' - 6\mathscr{H}\Psi' - 3\Psi'' &= 12\pi G a^2 \delta p^{(\mathrm{GI})}\end{aligned} \tag{7.156}$$

$$\Phi + \Psi = -8\pi G a^2 \bar{p}\Pi^{(\mathrm{S})} \tag{7.157}$$

が得られる．ただし背景時空の関係式 (7.68), (7.69) を用いた．これら 4 つの式が，ゲージ不変量で表したスカラー型成分のアインシュタイン方程式である．この方程

式系には 6 つの未知変数が含まれているため，実際に解くにはさらに 2 つの方程式が必要である．それは，状態方程式など，エネルギー成分の具体的な性質によって決まる．

保存則の式 (7.83), (7.84) はアインシュタイン方程式に含まれているので，それらも当然ながらゲージ不変量だけで書き表される．式 (7.62), (7.66) などを用いると，実際にゲージ依存する項が打ち消し合うことを確かめられる．その結果，

$$\delta^{(\mathrm{GI})\prime} + 3\mathscr{H}\left(c_{\mathrm{s}}{}^2 - w\right)\delta^{(\mathrm{GI})} + (1+w)\left(\Delta v^{(\mathrm{GI})} + 3\Psi'\right) + 3\mathscr{H}w\Gamma = 0 \tag{7.158}$$

$$v^{(\mathrm{GI})\prime} + \mathscr{H}\left(1 - 3c_{\mathrm{s}}{}^2\right)v^{(\mathrm{GI})} + \frac{c_{\mathrm{s}}{}^2}{1+w}\delta^{(\mathrm{GI})} + \Phi + \frac{w}{1+w}\left[\Gamma + \frac{2}{3}(\Delta + 3K)\Pi^{(\mathrm{S})}\right] = 0 \tag{7.159}$$

が得られる．この 2 つの式は，線形アインシュタイン方程式 (7.154), (7.155) から直接導くことも可能である．また，式 (7.154), (7.155), (7.157) により，

$$(\Delta + 3K)\,\Psi = -4\pi Ga^2\bar{\rho}\left[\delta^{(\mathrm{GI})} - 3\mathscr{H}(1+w)v^{(\mathrm{GI})}\right] \tag{7.160}$$

$$\Phi + \Psi = -8\pi Ga^2\bar{p}\Pi^{(\mathrm{S})} \tag{7.161}$$

が成り立つ．これら 4 つの式 (7.158)-(7.161) は，スカラー型成分の線形アインシュタイン方程式 (7.154)-(7.157) と等価である．

ベクトル型摂動

次に，ベクトル型摂動について考える．摂動計量のベクトル型成分 $B^{(\mathrm{V})}{}_i, E^{(\mathrm{V})}{}_i$ のゲージ変換は式 (7.117), (7.118) で与えられるので，ゲージ不変量となる組み合わせは

$$\psi_i = B^{(\mathrm{V})}{}_i + E^{(\mathrm{V})}{}_i{}' \tag{7.162}$$

だけしかない．また，速度場のゲージ変換はベクトル型成分について式 (7.128) で与えられるので，ゲージ不変量として

$$v^{(\mathrm{VGI})}{}_i = v^{(\mathrm{V})}{}_i - B^{(\mathrm{V})}{}_i \tag{7.163}$$

が定義できる．非等方応力テンソルのベクトル型成分 $\Pi^{(\mathrm{V})}{}_i$ はそのままでゲージ不変である．

ベクトル型成分のアインシュタイン方程式 (7.139), (7.140) を上で定義した変数で表すと，

$$(\Delta + 2K)\psi_i = -16\pi G a^2(\bar{\rho} + \bar{p})v^{(\mathrm{VGI})}{}_i \tag{7.164}$$

$$\psi_i{}' + 2\mathscr{H}\psi_i = 8\pi G a^2 \bar{p}\Pi^{(\mathrm{V})}{}_i \tag{7.165}$$

が得られ，ゲージ不変量だけの方程式となる．また，ベクトル型成分の保存則の式 (7.145) は

$$v^{(\mathrm{VGI})\prime}{}_i + \mathscr{H}\left(1 - 3{c_{\mathrm{s}}}^2\right)v^{(\mathrm{VGI})}{}_i + \frac{w}{2(1+w)}(\Delta + 2K)\Pi^{(\mathrm{V})}{}_i = 0 \tag{7.166}$$

となる．この式は，式 (7.164), (7.165) から ψ_i を消去しても導くことができる．

テンソル型摂動

摂動計量のテンソル型成分 $E^{(\mathrm{T})}{}_{ij}$ は，式 (7.119) のようにそのままでゲージ不変量である．ゲージ変換は摂動時空の座標変換であるが，その自由度にはテンソル型成分が含まれていないため，テンソル型成分はゲージ変換を受けないのである．したがって，テンソル型成分のアインシュタイン方程式 (7.141) はそのままでゲージ不変な方程式である．テンソル型摂動はトレースと発散を持たず，その自由度は重力波に対応する．すなわち，式 (7.141) は膨張宇宙における重力波の波動方程式を与える．

7.3.2 バーディーン変数

ここまでの導出からわかるように，ゲージ不変量となる変数の選び方は一意的ではない．上に定義したもの以外にも，いくつか便利なゲージ不変量の定義がある．ここではとくに方程式を簡潔な形にする別のゲージ不変変数をいくつか導入する．

まず，式 (7.160) に着目する．この方程式は，ニュートン重力理論における重力場のポアソン方程式に対応した形をしている．ニュートン重力と異なるところは，左辺に曲率項が含まれることと，右辺に速度場が含まれることである．後に示されるように，非相対論的極限では右辺の速度場の項が密度ゆらぎの項に比べて無視できるようになる．すなわち，ゲージ不変な密度ゆらぎの変数を改めて

$$\varDelta \equiv \delta^{(\mathrm{GI})} - 3\mathscr{H}(1+w)v^{(\mathrm{GI})} = \delta + \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}}\left(v^{(\mathrm{S})} - B^{(\mathrm{S})}\right) \tag{7.167}$$

と定義しなおすと，非相対論的な極限では $\delta^{(\mathrm{GI})}$ と $\varDelta$ のどちらも密度ゆらぎに対応する量になる．相対論では座標系の選び方，とくに時間一定面の選び方によって密度の値が変化してしまうため，非相対論的な密度ゆらぎに対応する量を一意的に決

めることはできないのである．

ここで，式 (7.151) で定義した速度に対応するゲージ不変量 $v^{(\mathrm{GI})}$ と，最初からゲージ不変量である非等方応力テンソルのスカラー型成分 $\Pi^{(\mathrm{S})}$ を，簡略な記号

$$V \equiv v^{(\mathrm{GI})} = v^{(\mathrm{S})} + E^{(\mathrm{S})\prime} \tag{7.168}$$

$$\Pi \equiv \Pi^{(\mathrm{S})} \tag{7.169}$$

で表すことにする．ゲージ不変量となる変数 $\varDelta$, V, Γ, Π を用いて方程式 (7.158)-(7.161) を書き直し，式 (7.63), (7.68), (7.155) を用いて変形すると，多少簡単化された方程式系

$$\varDelta' - 3\mathscr{H}w\varDelta = -(\Delta + 3K)\left[(1+w)V - 2\mathscr{H}w\Pi\right] \tag{7.170}$$

$$V' + \mathscr{H}V = -\frac{{c_\mathrm{s}}^2}{1+w}\varDelta - \varPhi - \frac{w}{1+w}\left[\Gamma + \frac{2}{3}(\Delta + 3K)\Pi\right] \tag{7.171}$$

$$(\Delta + 3K)\,\varPsi = -4\pi G a^2 \bar{\rho}\varDelta \tag{7.172}$$

$$\varPhi + \varPsi = -8\pi G a^2 \bar{p}\Pi \tag{7.173}$$

が得られる．ここで用いられているゲージ不変変数 $\varPhi$, $\varPsi$, $\varDelta$, V などは，ゲージ不変摂動論を創始したジェームス・バーディーン*3によって最初に導入されたものであり，**バーディーン変数** (Bardeen's variables) と呼ばれる量である．

ここで，バーディーン変数 $\varPsi$ が満たす 2 階微分方程式を導出しておくと便利である．まず，式 (7.154), (7.156) を式 (7.153) へ代入して $\delta^{(\mathrm{GI})}$, $\delta p^{(\mathrm{GI})}$ を消去し，さらに式 (7.157) によって $\varPhi$ も消去する．式 (7.68) を用いてその結果を変形すれば，

$$\begin{aligned}
&\varPsi'' + 3\mathscr{H}\left(1 + {c_\mathrm{s}}^2\right)\varPsi' - {c_\mathrm{s}}^2\Delta\varPsi + \left[2\mathscr{H}' + \left(\mathscr{H}^2 - K\right)\left(1 + 3{c_\mathrm{s}}^2\right)\right]\varPsi \\
&= -8\pi G a^2 \bar{\rho}\left\{\frac{1}{2}w\Gamma + \mathscr{H}w\Pi' + \frac{1}{3}w\Delta\Pi + \left[2\mathscr{H}'w + 3\mathscr{H}^2\left(w - {c_\mathrm{s}}^2\right)\right]\Pi\right\}
\end{aligned} \tag{7.174}$$

が得られる．この方程式を**バーディーン方程式** (Bardeen equation) という．式 (7.174) に背景時空の式 (7.60), (7.61) を代入して $\mathscr{H}^2$, $\mathscr{H}'$ を消去すれば，バーディーン方程式は

---

*3 ノーベル物理学賞を 2 度受賞したジョン・バーディーンは彼の父親である．

$$\begin{aligned}
&\Psi'' + 3\mathscr{H}\left(1 + {c_s}^2\right)\Psi' - {c_s}^2\Delta\Psi \\
&\qquad + \left[8\pi G a^2\bar{\rho}\left({c_s}^2 - w\right) + \Lambda a^2\left(1 + {c_s}^2\right) - 2K\left(1 + 3{c_s}^2\right)\right]\Psi \\
&\quad = -8\pi G a^2\bar{\rho}\left\{\frac{1}{2}w\Gamma + \mathscr{H}w\Pi' + \frac{1}{3}w\Delta\Pi + \left[\frac{8\pi G}{3}a^2\bar{\rho}\left(2w - 3w^2 - 3{c_s}^2\right)\right.\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left. + \frac{\Lambda}{3}a^2\left(5w - 3{c_s}^2\right) + 3K\left({c_s}^2 - w\right)\right]\Pi\right\} \qquad (7.175)
\end{aligned}$$

という形にも表すことができる．

エントロピーゆらぎ Γ と非等方応力テンソル Π が与えられれば，バーディーン方程式は変数 Ψ に対する発展方程式として解くことができる．その解が求められれば，式 (7.172), (7.173), (7.155) から導かれる式

$$\varDelta = -\frac{(\Delta + 3K)\Psi}{4\pi G a^2\bar{\rho}} \qquad (7.176)$$

$$\Phi = -\Psi - 8\pi G a^2\bar{p}\Pi \qquad (7.177)$$

$$V = \frac{\Psi' - \mathscr{H}\Phi}{4\pi G a^2(\bar{\rho} + \bar{p})} \qquad (7.178)$$

により，他のバーディーン変数を順番に求めることができる．また式 (7.167), (7.168) により

$$\delta^{(\mathrm{GI})} = \varDelta + 3\mathscr{H}(1 + w)V \qquad (7.179)$$

が成り立つ．

バーディーン方程式 (7.174) に $\Delta + 3K$ を作用させると，式 (7.172) により密度ゆらぎを表すバーディーン変数 $\varDelta$ に対する方程式になる．こうして得られる式に対して，式 (7.62), (7.66) を用いて変形すると，

$$\begin{aligned}
&\varDelta'' + \mathscr{H}\left(1 - 6w + 3{c_s}^2\right)\varDelta' - {c_s}^2(\Delta + 3K)\varDelta \\
&\qquad + \left[\mathscr{H}'(1 - 3w) - \mathscr{H}^2\left(1 + 12w - 9{c_s}^2\right) - K\right]\varDelta \\
&= (\Delta + 3K)\left\{w\Gamma + 2\mathscr{H}w\Pi' + \frac{2}{3}w\Delta\Pi + 2\left[2\mathscr{H}'w + 3\mathscr{H}^2\left(w - {c_s}^2\right)\right]\Pi\right\} \qquad (7.180)
\end{aligned}$$

が得られる．これはエントロピーゆらぎ Γ と非等方応力テンソル Π が与えられたときのバーディーン変数 $\varDelta$ に対する発展方程式となっている．方程式系 (7.170)–(7.173) から V, Φ, Ψ を消去することで上の式を導くことも可能である．式 (7.180) に背景時空の式 (7.60), (7.61) を代入して $\mathscr{H}^2, \mathscr{H}'$ を消去すれば，

$$
\begin{aligned}
&\varDelta'' + \mathscr{H}\left(1 - 6w + 3{c_s}^2\right)\varDelta' - {c_s}^2(\Delta + 3K)\varDelta \\
&\quad - \left[4\pi G a^2\bar{\rho}\left(1 + 8w - 3w^2 - 6{c_s}^2\right) + \Lambda a^2\left(5w - 3{c_s}^2\right) + 3K\left(3{c_s}^2 - 4w\right)\right]\varDelta \\
&\quad = (\Delta + 3K)\left\{w\Gamma + 2\mathscr{H}w\Pi' + \frac{2}{3}w\Delta\Pi + 2\left[\frac{8\pi G}{3}a^2\bar{\rho}\left(2w - 3w^2 - 3{c_s}^2\right)\right.\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left. + \frac{\Lambda}{3}a^2\left(5w - 3{c_s}^2\right) + 3K\left({c_s}^2 - w\right)\right]\Pi\right\} \qquad (7.181)
\end{aligned}
$$

という形に表すこともできる．

7.4 いくつかのゲージ固定法

ゲージ不変摂動論はゲージ依存性を見通しよく扱える利点を持つが，取り扱う問題によっては，特別なゲージ固定を適用した方が簡単な場合もある．ここでは，よく使われるいくつかのゲージ固定法を取り上げ，ゲージ不変摂動論との関係を明らかにしておく．摂動のテンソル型成分やベクトル型成分については，そのゲージ依存性がほぼ明らかであるため，以下ではスカラー型成分についてのみ考える．スカラー型成分のゲージ自由度は 2 であるから，ゲージ固定条件を 2 つ課すことができる．

7.4.1 共形ニュートン・ゲージ

はじめに，**共形ニュートン・ゲージ** (conformal Newtonian gauge) と呼ばれるゲージ固定を取り上げる．このゲージは**縦型ゲージ** (longitudinal gauge) とも呼ばれる．そのゲージ条件は

$$B^{(S)} = E^{(S)} = 0 \qquad (7.182)$$

である．このゲージでは，式 (7.148), (7.149) により

$$A = \Phi, \quad D = \Psi \qquad (7.183)$$

が成り立つ．このとき，計量を表す線素は

$$ds^2 = a^2(\tau)\left[-(1 + 2\Phi)d\tau^2 + (1 + 2\Psi)\gamma_{ij}dx^i dx^j\right] \qquad (7.184)$$

となる．

ニュートン重力ポテンシャル ϕ と平坦ミンコフスキー時空における時間計量の

ゆらぎ h_{00} の関係は，式 (1.205) で与えられたように，重力場の弱い極限で $\phi \simeq -h_{00}/2$ である．宇宙が膨張しない極限に対応する $a(\tau) = 1$ を式 (7.3) に代入すれば，変数 A が重力ポテンシャルに対応する量であることがわかる．したがって，Φ は共形ニュートン・ゲージにおけるニュートン重力ポテンシャルに対応する量である．一方，Ψ は空間計量のゆらぎを表している．式 (7.184) の空間部分の形により，このゲージでは空間の膨張がどの点でも等方的になる．

式 (7.182) のゲージ条件は，ゲージ自由度を完全に固定している．このことは，ゲージ変換の式 (7.114), (7.116) から導かれる．ゲージ変換後の摂動計量がゲージ条件 $\widetilde{B}^{(S)} = \widetilde{E}^{(S)} = 0$ を満たすためには，ゲージ変換の自由度 T, $L^{(S)}$ を $T = B^{(S)} + E^{(S)\prime}$, $L^{(S)} = E^{(S)}$ と選ぶ必要がある．これはもとの摂動計量の値により一意的に決まる．したがって，共形ニュートン・ゲージ条件を満たす計量には，もはや他にゲージ自由度が残っていない．

式 (7.150)-(7.152) で定義されるゲージ不変量は，式 (7.182) により共形ニュートン・ゲージの変数により

$$\delta^{(\mathrm{GI})} = \delta, \quad v^{(\mathrm{GI})} = v^{(\mathrm{S})}, \quad \delta p^{(\mathrm{GI})} = \delta p \tag{7.185}$$

で与えられる．つまり，これらのゲージ不変量は，共形ニュートン・ゲージで見たそれぞれの物理量に対応していることがわかる．このため，共形ニュートン・ゲージにおけるアインシュタイン方程式は，式 (7.154), (7.155) あるいは式 (7.158)-(7.161) とまったく同じ形である．逆に考えれば，共形ニュートン・ゲージを適用して計算された任意の量に対して，式 (7.148)-(7.152) のように変数を置き換えると，ゲージ不変量を用いた一般的表式を得ることができる．

7.4.2 同期ゲージ

次に，**同期ゲージ** (synchronous gauge) と呼ばれるゲージ固定を取り上げる．このゲージでの計算は簡単化することが多いためによく用いられてきたが，以下で述べるようにゲージ固定が完全でないという欠点も持つ．同期ゲージのゲージ条件は

$$A = B^{(\mathrm{S})} = 0 \tag{7.186}$$

である．ここで残りの摂動計量を

$$D = -\triangle\eta, \quad E^{(\mathrm{S})} = \frac{1}{2}(h + 6\eta) \tag{7.187}$$

と表して，新しい変数 η, h を定義する．このとき，計量のスカラー型成分に着目

した線素は

$$ds^2 = a^2(\tau)\left[-d\tau^2 + (\gamma_{ij} + h_{|ij} + 6\eta_{|ij} - 2\gamma_{ij}\Delta\eta)\,dx^i dx^j\right] \tag{7.188}$$

と表される．空間計量のスカラー型成分に対して，変数 h はトレース成分，変数 η はトレースなし成分を与えている．

同期ゲージは，空間座標値を一定にする軌道が測地線である，という特徴を持つ．実際にこのゲージでは，式 (7.11), (7.186) により $\Gamma^i_{00} = 0$ となるから，測地線方程式 (1.192) の i 成分は

$$\frac{d^2x^i}{d\lambda^2} + 2\frac{dx^0}{d\lambda}\frac{dx^j}{d\lambda}\Gamma^i_{0j} + \frac{dx^j}{d\lambda}\frac{dx^k}{d\lambda}\Gamma^i_{jk} = 0 \tag{7.189}$$

となる．すると $dx^i/d\lambda = 0$ すなわち「x^i = 一定」は測地線方程式の解になっていることがわかる．また，同期ゲージでは時間座標の軸が時間一定面に垂直である．このことから，座標値が一定の測地線に沿って置いた時計が，その場所の時間座標の値を決める．

共形ニュートン・ゲージの場合と異なり，同期ゲージではゲージ自由度が完全に固定されていない．これを具体的に見るため，ゲージ変換の式 (7.113), (7.114) に着目する．ゲージ変換後の摂動計量がゲージ条件 $A = B^{(S)} = 0$ を満たすには，ゲージ変換の自由度 T, $L^{(S)}$ がもとの摂動計量の値を用いて $T' + \mathscr{H}T = A$, $L^{(S)\prime} - T = -B^{(S)}$ を満たせばよい．この条件は恒等式 $T' + \mathscr{H}T = (aT)'/a$ を用いると積分することができて，

$$T = \frac{1}{a}\int aA d\tau + \frac{c_0}{a}, \quad L^{(S)} = \int(-B^{(S)} + T)d\tau + c_1 \tag{7.190}$$

が得られる．ここで任意に選ぶことのできる 2 つの積分定数 c_0, c_1 が現れる．これらの積分定数は時間に関する定数ではあるが，初期時刻の空間座標に関しては一般の関数であってよい．ここに現れた余分な自由度は，上のゲージ条件では固定できないゲージ自由度である．すなわち，同期ゲージにおいてはゲージ自由度が完全には固定されていない．

上の式 (7.190) からわかるように，残っている余分な自由度を固定するには，初期条件を与える時間一定面において固定することができる．すなわち，同期ゲージでは，初期条件に選ぶ時間一定面のとり方，およびその上での空間座標の選び方に任意性が残っているのである．初期条件を具体的に選ぶことにより，同期ゲージに残っている余分なゲージ自由度がはじめて固定される．このことを念頭に置いておかないと，非物理的な自由度を物理的な自由度ととり違えるなど混乱を招くことに

なる．このように，同期ゲージにおけるゲージ自由度の取り扱いには注意が必要である．

計量のゲージ不変量を与える式 (7.148), (7.149) は，同期ゲージのもとで，

$$\Phi = -\frac{1}{2}\left[h'' + 6\eta'' + \mathscr{H}(h' + 6\eta')\right], \quad \Psi = -\Delta\eta - \frac{1}{2}\mathscr{H}(h' + 6\eta') \tag{7.191}$$

となる．この式は，共形ニュートン・ゲージと同期ゲージの摂動計量に対する関係も与えている．また，エネルギー成分のゲージ不変量を与える式 (7.150)–(7.152) は同期ゲージにおいて，

$$\delta^{(\mathrm{GI})} = \delta - \frac{1}{2}\frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}}(h' + 6\eta'), \quad v^{(\mathrm{GI})} = v^{(\mathrm{S})} + \frac{1}{2}(h' + 6\eta'), \quad \delta p^{(\mathrm{GI})} = \delta p - \frac{1}{2}\bar{p}'(h' + 6\eta') \tag{7.192}$$

となる．また，式 (7.167) で定義された密度ゆらぎのバーディーン変数は，同期ゲージにおいて

$$\varDelta = \delta - 3\mathscr{H}(1 + w)v^{(\mathrm{S})} \tag{7.193}$$

となる．重力相互作用しか行わない流体については，初期条件として流体素片の速度をゼロとする時間一定面を選ぶと，上で述べた座標一定の世界線が測地線になるという性質により，速度はその後もゼロのままである．この特殊な初期条件の場合には，同期ゲージの密度ゆらぎがバーディーン変数 $\varDelta$ に一致する．

式 (7.186), (7.187) を線形アインシュタイン方程式 (7.135)–(7.138) へ代入することにより，同期ゲージのアインシュタイン方程式は

$$(\Delta + 3K)\Delta\eta + \frac{1}{2}\mathscr{H}\Delta h' = 4\pi G a^2 \bar{\rho}\delta \tag{7.194}$$

$$(\Delta + 3K)\eta' + \frac{1}{2}K h' = -4\pi G a^2(\bar{\rho} + \bar{p})v^{(\mathrm{S})} \tag{7.195}$$

$$\Delta h'' + 2\mathscr{H}\Delta h' + 2(\Delta + 3K)\Delta\eta = -24\pi G a^2 \delta p \tag{7.196}$$

$$h'' + 6\eta'' + 2\mathscr{H}(h' + 6\eta') + 2\Delta\eta = 16\pi G a^2 \bar{p}\Pi^{(\mathrm{S})} \tag{7.197}$$

となる．また，保存則の式 (7.143), (7.144) は同期ゲージにおいて

$$\delta' + 3\mathscr{H}\left(c_{\mathrm{s}}{}^2 - w\right)\delta + (1 + w)\left(\Delta v^{(\mathrm{S})} + \frac{1}{2}\Delta h'\right) + 3\mathscr{H}w\Gamma = 0 \tag{7.198}$$

$$v^{(\mathrm{S})\prime} + \mathscr{H}\left(1 - 3c_{\mathrm{s}}{}^2\right)v^{(\mathrm{S})} + \frac{c_{\mathrm{s}}{}^2}{1 + w}\delta + \frac{w}{1 + w}\left[\Gamma + \frac{2}{3}(\Delta + 3K)\Pi^{(\mathrm{S})}\right] = 0 \tag{7.199}$$

で与えられる．

7.4.3 共動ゲージ

次に，**共動ゲージ** (comoving gauge) と呼ばれるゲージ固定について述べる．ゲージ条件は

$$B^{(\mathrm{S})} = v^{(\mathrm{S})}, \quad E^{(\mathrm{S})} = 0 \tag{7.200}$$

である．第 1 の条件と式 (7.41) により，このゲージでは流体素片に対する共変成分の 4 元速度 u_μ の空間成分が消える．すなわち，4 元速度が時間一定面に垂直であり，座標値が流体素片に固定されている．また第 2 の条件により空間の膨張は等方的である．ここで残りの摂動計量を

$$A = \xi, \quad D = \zeta \tag{7.201}$$

とおけば，線素は

$$ds^2 = a^2(\tau)\left[-(1+2\xi)d\tau^2 - 2v^{(\mathrm{S})}{}_{|i}d\tau dx^i + (1+2\zeta)\gamma_{ij}dx^i dx^j\right] \tag{7.202}$$

という形になっている．

共動ゲージはゲージ自由度を完全に固定している．実際，式 (7.114), (7.116) により，ゲージ変換後の摂動計量が $\widetilde{B}^{(\mathrm{S})} - v^{(\mathrm{S})} = \widetilde{E}^{(\mathrm{S})} = 0$ を満たすという条件より $T = B^{(\mathrm{S})} + E^{(\mathrm{S})\prime} - v^{(\mathrm{S})}, L^{(\mathrm{S})} = E^{(\mathrm{S})}$ と一意的にゲージ変換が定まる．つまり，他に余分なゲージ自由度は残っていない．

計量のゲージ不変量を与える式 (7.148), (7.149) は，共動ゲージのもとで

$$\Phi = \xi - v^{(\mathrm{S})\prime} - \mathscr{H}v^{(\mathrm{S})}, \quad \Psi = \zeta - \mathscr{H}v^{(\mathrm{S})} \tag{7.203}$$

となる．また，エネルギー成分に対するゲージ不変量の式 (7.150)–(7.152) は

$$\delta^{(\mathrm{GI})} = \delta - \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}}v^{(\mathrm{S})}, \quad v^{(\mathrm{GI})} = v^{(\mathrm{S})}, \quad \delta p^{(\mathrm{GI})} = \delta p - \bar{p}'v^{(\mathrm{S})} \tag{7.204}$$

となる．さらに，式 (7.167) で定義されるバーディーン変数は

$$\varDelta = \delta \tag{7.205}$$

となる．式 (7.168) の記法により，共動ゲージの速度 $v^{(\mathrm{S})}$ もゲージ不変な速度 $V = v^{(\mathrm{GI})}$ に一致する．つまり，エネルギー成分についてのバーディーン変数 $\varDelta$, V は，共動ゲージで見た密度ゆらぎと速度場を表すものだったのである．

式 (7.200), (7.201) を線形アインシュタイン方程式 (7.135)–(7.138) へ代入するこ

とにより，共動ゲージのアインシュタイン方程式は

$$3\mathscr{H}\left(\mathscr{H}\xi-\zeta'\right)+(\Delta+3K)\zeta=-4\pi Ga^2\bar{\rho}\delta+\mathscr{H}\Delta v^{(S)} \tag{7.206}$$

$$\mathscr{H}\xi-\zeta'=-Kv^{(S)} \tag{7.207}$$

$$3\mathscr{H}\xi'+3\left(\mathscr{H}^2+2\mathscr{H}'\right)\xi+\Delta\xi-3\zeta''-6\mathscr{H}\zeta'+(\Delta+3K)\zeta$$
$$=12\pi Ga^2\delta p+\Delta v^{(S)\prime}+2\mathscr{H}\Delta v^{(S)} \tag{7.208}$$

$$\xi+\zeta=-8\pi Ga^2\bar{p}\Pi^{(S)}+v^{(S)\prime}+2\mathscr{H}v^{(S)} \tag{7.209}$$

となる．また，保存則の式 (7.143), (7.144) は

$$\delta'+3\mathscr{H}\left({c_s}^2-w\right)\delta+(1+w)\left(\Delta v^{(S)}+3\zeta'\right)+3\mathscr{H}w\Gamma=0 \tag{7.210}$$

$${c_s}^2\delta+(1+w)\xi+w\left[\Gamma+\frac{2}{3}(\Delta+3K)\Pi^{(S)}\right]=0 \tag{7.211}$$

となる．

7.4.4 空間的平坦ゲージ

具体的なゲージ固定の例として最後に，**空間的平坦ゲージ** (spatially flat gauge) について述べる．そのゲージ条件は

$$D=E^{(S)}=0 \tag{7.212}$$

である．このとき，式 (7.5) によりスカラー成分についての線素は

$$ds^2=a^2(\tau)\left[-(1+2A)d\tau^2-2B^{(S)}{}_{|i}d\tau dx^i+\gamma_{ij}dx^idx^j\right] \tag{7.213}$$

となる．

空間的平坦ゲージもゲージ自由度を完全に固定している．実際に，式 (7.115), (7.116) により，ゲージ変換後の摂動計量が $\tilde{D}=\tilde{E}^{(S)}=0$ を満たすという条件より $T=\mathscr{H}^{-1}D$, $L^{(S)}=E^{(S)}$ と一意的にゲージ変換が定まり，他に余分なゲージ自由度は残らない．

計量のゲージ不変量を与える式 (7.148), (7.149) は，共動ゲージのもとで

$$\Phi=A-B^{(S)\prime}-\mathscr{H}B^{(S)},\quad \Psi=-\mathscr{H}B^{(S)} \tag{7.214}$$

となる．また，エネルギー成分に対するゲージ不変量の式 (7.150)–(7.152) は

$$\delta^{(GI)}=\delta-\frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}}B^{(S)},\quad v^{(GI)}=v^{(S)},\quad \delta p^{(GI)}=\delta p-\bar{p}'B^{(S)} \tag{7.215}$$

となる．また式 (7.167) で定義されるバーディーン変数は

$$\varDelta = \delta - 3\mathscr{H}(1+w)\left(v^{(S)} - B^{(S)}\right) \tag{7.216}$$

である．

式 (7.212) を線形アインシュタイン方程式 (7.135)-(7.138) へ代入することにより，共動ゲージのアインシュタイン方程式は

$$3\mathscr{H}^2 A - \mathscr{H}\Delta B^{(S)} = -4\pi G a^2 \bar{\rho}\delta \tag{7.217}$$

$$\mathscr{H}A + KB^{(S)} = -4\pi G a^2 (\bar{\rho} + \bar{p})\left(v^{(S)} - B^{(S)}\right) \tag{7.218}$$

$$\begin{aligned} 3\mathscr{H}A' + 3\left(\mathscr{H}^2 + 2\mathscr{H}'\right)A + \Delta A & \\ - \Delta B^{(S)\prime} - 2\mathscr{H}\Delta B^{(S)} &= 12\pi G a^2 \delta p \end{aligned} \tag{7.219}$$

$$A - B^{(S)\prime} - 2\mathscr{H}B^{(S)} = -8\pi G a^2 \bar{p}\varPi^{(S)} \tag{7.220}$$

となる．また，保存則の式 (7.143), (7.144) は

$$\delta' + 3\mathscr{H}\left({c_s}^2 - w\right)\delta + (1+w)\Delta v^{(S)} + 3\mathscr{H}w\varGamma = 0 \tag{7.221}$$

$$\begin{aligned} \left(v^{(S)} - B^{(S)}\right)' + \mathscr{H}\left(1 - 3{c_s}^2\right)\left(v^{(S)} - B^{(S)}\right) + \frac{{c_s}^2}{1+w}\delta + A & \\ + \frac{w}{1+w}\left[\varGamma + \frac{2}{3}(\Delta + 3K)\varPi^{(S)}\right] &= 0 \end{aligned} \tag{7.222}$$

となる．

7.4.5 曲率ゆらぎ

共動ゲージにおける空間計量の等方的ゆらぎ ζ は，応用上有用な量である．この摂動変数をとくに**曲率ゆらぎ** (curvature perturbations) という．この変数が有用である大きな理由は，ハッブル・スケールよりも大きなスケールで，時間的な一定値になる場合がある，という性質による．共動ゲージにおいて，摂動計量 ξ, ζ は，式 (7.203) によりバーディーン変数 $\varPhi, \varPsi, V = v^{(GI)}$ を用いて

$$\xi = \varPhi + V' + \mathscr{H}V, \quad \zeta = \varPsi + \mathscr{H}V \tag{7.223}$$

と表される．この式を任意のゲージにおける定義と考えれば，変数 ξ, ζ をゲージ不変量とみなすことができる．ここで，式 (7.155), (7.63) により

$$\mathscr{H}\varPhi - \varPsi' = -4\pi G a^2(\bar{\rho} + \bar{p})V = -\frac{3}{2}\mathscr{H}^2\varOmega(1+w)V \tag{7.224}$$

が成り立つから，曲率ゆらぎ ζ は

$$\zeta = \Psi - \frac{\mathscr{H}(\mathscr{H}\Phi - \Psi')}{4\pi G a^2(\bar{\rho} + \bar{p})} = \Psi - \frac{2}{3}\frac{\mathscr{H}\Phi - \Psi'}{\mathscr{H}\Omega(1+w)} \tag{7.225}$$

となってゲージ不変ポテンシャルだけで表される．一方で，式 (7.223) 第 1 式と式 (7.171) から

$$\xi = -\frac{1}{1+w}\left[c_s{}^2\varDelta + w\Gamma + \frac{2}{3}w(\Delta + 3K)\Pi\right] \tag{7.226}$$

が得られる．右辺に式 (7.172), (7.173) を用いれば，

$$\xi = \frac{2}{9}\frac{1}{\mathscr{H}^2\Omega(1+w)}(\Delta + 3K)\left[\left(1 + 3c_s{}^2\right)\Psi + \Phi\right] - \frac{w}{1+w}\Gamma \tag{7.227}$$

と表すこともできる．

曲率ゆらぎの時間変化を求めるため，式 (7.223) の第 2 式を時間微分する．得られた式から式 (7.223) の第 1 式により V' を消去し，さらに式 (7.68), (7.224) を用いて $\mathscr{H}'$, Ψ' を消去すると，

$$\mathscr{H}^{-1}\zeta' = \xi + \frac{KV}{\mathscr{H}} \tag{7.228}$$

となる．ただし，

$$\mathscr{H}^{-1}\frac{d}{d\tau} = \frac{d}{d\ln a} \tag{7.229}$$

という演算子は無次元化された時間微分を表し，宇宙膨張の時間スケールでの変化率を表している．式 (7.228) に式 (7.227) を代入すると，

$$\mathscr{H}^{-1}\zeta' = \frac{2}{9}\frac{1}{\mathscr{H}^2\Omega(1+w)}(\Delta + 3K)\left[\left(1 + 3c_s{}^2\right)\Psi + \Phi\right] - \frac{w}{1+w}\Gamma + \frac{KV}{\mathscr{H}} \tag{7.230}$$

が得られる．

ここで曲率 K とエントロピーゆらぎ Γ が無視できる場合を考えると，上の式は全体にラプラシアン Δ が作用する形になる．ゆらぎの空間依存性についてフーリエ変換すると，ラプラシアンは波数 k を用いて $\Delta \to -k^2$ と置き換わるので，この場合，式 (7.230) は

$$\mathscr{H}^{-1}\zeta' = -\frac{2}{9}\left(\frac{k}{\mathscr{H}}\right)^2\frac{\left(1 + 3c_s{}^2\right)\Psi + \Phi}{\Omega(1+w)} \tag{7.231}$$

となる．ここで因子 k^{-1} はゆらぎの波長の大きさの目安となり，$\mathscr{H}^{-1}$ はハッブル・スケールを表す．ハッブル・スケールよりも波長が十分に長い超ハッブル・

スケールでは $k^{-1} \gg \mathscr{H}^{-1}$ すなわち $k/\mathscr{H} \ll 1$ となる．この場合，式 (7.231) の右辺は十分に小さくなる．すなわち超ハッブル・スケールで曲率ゆらぎの値は保存し，時間的にほぼ一定に保たれる．

初期ゆらぎにエントロピーゆらぎの成分がない場合を，**断熱ゆらぎ** (adiabatic perturbations) という．逆に，初期ゆらぎにエントロピーゆらぎしかなく，したがって宇宙の曲率が空間的に一定になる場合を**等曲率ゆらぎ** (isocurvature perturbations) という．上で示されたことは「宇宙が平坦 $K = 0$ で，断熱ゆらぎ $\Gamma = 0$ の場合，超ハッブル・スケール $k \ll \mathscr{H}$ において曲率ゆらぎ ζ の値が保存する」ということである．観測的に我々の宇宙は非常によい精度で平坦であり，初期ゆらぎは断熱ゆらぎであるとして矛盾がない．このため，現実の宇宙も超ホライズン・スケールで曲率ゆらぎが保存するための 2 つの条件を満たしていると考えられる．超ハッブル・スケールのゆらぎの時間変化を調べるのに，時間的な保存量となる曲率ゆらぎは便利な量である．

7.5 多成分系

7.5.1 多成分系の摂動量

ここまでは，アインシュタイン方程式の右辺として，エネルギー成分のすべての寄与を含む全エネルギー運動量テンソル $T^\mu{}_\nu$ を考えてきた．一般にエネルギー運動量テンソルには複数種類のエネルギー成分が寄与する．全エネルギー運動量テンソル $T^\mu{}_\nu$ は，エネルギー成分の種類 a ごとに定義できるエネルギー運動量テンソル $T_a{}^\mu{}_\nu$ の和として，

$$T^\mu{}_\nu = \sum_a T_a{}^\mu{}_\nu \tag{7.232}$$

で与えられる．全成分の式 (7.50)–(7.53) と同様に，線形近似における各種類のエネルギー運動量テンソルは

$$T_a{}^0{}_0 = -\bar{\rho}_a - \bar{\rho}_a \delta_a \tag{7.233}$$

$$T_a{}^0{}_i = (\bar{\rho}_a + \bar{p}_a)(v_{a\,i} - B_i) \tag{7.234}$$

$$T_a{}^i{}_0 = -(\bar{\rho}_a + \bar{p}_a) v_a{}^i \tag{7.235}$$

$$T_a{}^i{}_j = \bar{p}_a \delta^i_j + \delta p_a \delta^i_j + \bar{p}_a \Pi_a{}^i{}_j \tag{7.236}$$

で与えられる．

背景時空に対しては，全エネルギー密度 $\bar{\rho}$ と全圧力 $\bar{p}$ が，各成分のそれぞれの値 $\bar{\rho}_a, \bar{p}_a$ の和として

$$\bar{\rho} = \sum_a \bar{\rho}_a, \qquad \bar{p} = \sum_a \bar{p}_a \tag{7.237}$$

で与えられる．また，背景時空における各成分 a の圧力・密度比を w_a とし，音速を c_a とする．すなわち，

$$w_a = \frac{\bar{p}_a}{\bar{\rho}_a}, \qquad {c_a}^2 = \frac{\bar{p}'_a}{\bar{\rho}'_a} \tag{7.238}$$

とする．このとき，式 (7.237) の第 2 式とその微分により

$$w\bar{\rho} = \sum_a w_a\bar{\rho}_a, \qquad {c_\mathrm{s}}^2\bar{\rho}' = \sum_a {c_a}^2\bar{\rho}'_a \tag{7.239}$$

が成り立つ．ただし，w, c_s は式 (7.63) で定義された全エネルギー成分についての圧力・密度比と音速である．

摂動量に対しては，式 (7.50)-(7.53) および式 (7.232)-(7.236) により，

$$\bar{\rho}\delta = \sum_a \bar{\rho}_a\delta_a \tag{7.240}$$

$$\bar{\rho}(1 + w)v_i = \sum_a \bar{\rho}_a(1 + w_a)v_{ai} \tag{7.241}$$

$$\delta p = \sum_a \delta p_a \tag{7.242}$$

$$\bar{p}\Pi^i{}_j = \sum_a \bar{p}_a{\Pi_a}^i{}_j \tag{7.243}$$

となることが見てとれる．これらの式から，式 (7.82) で与えられるエントロピーゆらぎ Γ を求めると，

$$\bar{p}\Gamma = \sum_a \left[\bar{p}_a\Gamma_a + \left({c_a}^2 - {c_\mathrm{s}}^2\right)\bar{\rho}_a\delta_a\right] \tag{7.244}$$

が得られる．ただし Γ_a は各エネルギー成分のエントロピーゆらぎで，

$$\Gamma_a = \frac{\delta p_a - {c_a}^2\bar{\rho}_a\delta_a}{\bar{p}_a} = \frac{\delta p_a}{\bar{p}_a} - \frac{{c_a}^2}{w_a}\delta_a \tag{7.245}$$

で定義される．各成分にエントロピーゆらぎ Γ_a がなかったとしても，音速の異なる成分がエネルギー密度に寄与すると，式 (7.244) により全体にエントロピーゆらぎが生じる．

7.5.2 多成分系のゲージ不変量

各エネルギー成分の摂動変数 $\delta_a, v_{ai}, \delta p, \Pi_a{}^i{}_j$ に対するゲージ変換は，全成分の場合と同様に導出できる．その結果は式 (7.93)-(7.96) と同じ形であり，

$$\delta_a \to \tilde{\delta}_a = \delta_a - \frac{\bar{\rho}'_a}{\bar{\rho}_a}T \tag{7.246}$$

$$v_{ai} \to \tilde{v}_{ai} = v_{ai} + L_i' \tag{7.247}$$

$$\delta p_a \to \tilde{\delta p}_a = \delta p_a - \bar{p}'_a T \tag{7.248}$$

$$\Pi_a{}^i{}_j \to \tilde{\Pi}_a{}^i{}_j = \Pi_a{}^i{}_j \tag{7.249}$$

となる．したがって，スカラー型成分のゲージ変換は式 (7.124)-(7.127) と同様に，

$$\delta_a \to \tilde{\delta}_a = \delta_a - \frac{\bar{\rho}_a{}'}{\bar{\rho}_a}T \tag{7.250}$$

$$v_a^{(\mathrm{S})} \to \tilde{v}_a^{(\mathrm{S})} = v_a^{(\mathrm{S})} + L^{(\mathrm{S})\prime} \tag{7.251}$$

$$\delta p_a \to \tilde{\delta p}_a = \delta p_a - \bar{p}_a{}' T \tag{7.252}$$

$$\Pi_a^{(\mathrm{S})i}{}_j \to \tilde{\Pi}_a^{(\mathrm{S})} = \Pi_a^{(\mathrm{S})} \tag{7.253}$$

となり，ベクトル型成分のゲージ変換は式 (7.128), (7.129) と同様に

$$v_a^{(\mathrm{V})}{}_i \to \tilde{v}_a^{(\mathrm{V})}{}_i = v_a^{(\mathrm{V})}{}_i + L^{(\mathrm{V})}{}_i{}' \tag{7.254}$$

$$\Pi_a^{(\mathrm{V})}{}_i \to \tilde{\Pi}_a^{(\mathrm{V})}{}_i = \Pi_a^{(\mathrm{V})}{}_i \tag{7.255}$$

となる．また，非等方応力テンソルのテンソル型成分はそのままゲージ不変量である．式 (7.250), (7.252) により，式 (7.245) で定義される各成分のエントロピーゆらぎ Γ_a はゲージ不変量である．

上に与えられるゲージ変換の性質から，各成分のゲージ不変量が定義できる．スカラー型摂動量については，全成分における式 (7.150)-(7.152) にならい，ゲージ不変量になる組み合わせとして

$$\delta_a^{(\mathrm{GI})} = \delta_a - \frac{\bar{\rho}_a{}'}{\bar{\rho}_a}\left(B^{(\mathrm{S})} + E^{(\mathrm{S})\prime}\right) \tag{7.256}$$

$$v_a^{(\mathrm{GI})} = v_a^{(\mathrm{S})} + E^{(\mathrm{S})\prime} \tag{7.257}$$

$$\delta p_a^{(\mathrm{GI})} = \delta p_a - \bar{p}_a{}'\left(B^{(\mathrm{S})} + E^{(\mathrm{S})\prime}\right) \tag{7.258}$$

が定義できる．これらのゲージ不変量は共形ニュートン・ゲージ ($B^{(\mathrm{S})} = E^{(\mathrm{S})} =$

0) から見た物理量に対応していることが明らかである．また，ベクトル型摂動量については，全成分における式 (7.163) にならい，ゲージ不変になる組み合わせとして

$$v_a^{(\mathrm{VGI})}{}_i = v_a^{(\mathrm{V})}{}_i - B^{(\mathrm{V})}{}_i \tag{7.259}$$

が定義できる．

式 (7.240)-(7.243) を上に定義したゲージ不変量で表すことにより，スカラー型成分について，

$$\bar{\rho}\delta^{(\mathrm{GI})} = \sum_a \bar{\rho}_a \delta_a^{(\mathrm{GI})} \tag{7.260}$$

$$\bar{\rho}(1+w)v^{(\mathrm{GI})} = \sum_a \bar{\rho}_a (1+w_a) v_a^{(\mathrm{GI})} \tag{7.261}$$

$$\delta p^{(\mathrm{GI})} = \sum_a \delta p_a^{(\mathrm{GI})} \tag{7.262}$$

$$\bar{p}\Pi^{(\mathrm{S})} = \sum_a \bar{p}_a \Pi_a^{(\mathrm{S})} \tag{7.263}$$

が得られ，ベクトル型成分について

$$\bar{\rho}(1+w)v^{(\mathrm{VGI})}{}_i = \sum_a \bar{\rho}_a (1+w_a) v_a^{(\mathrm{VGI})}{}_i \tag{7.264}$$

$$\bar{p}\Pi^{(\mathrm{V})} = \sum_a \bar{p}_a \Pi_a^{(\mathrm{V})} \tag{7.265}$$

が得られる．

式 (7.260), (7.261) により，式 (7.167) で定義されるバーディーン変数 Δ は

$$\bar{\rho}\Delta = \sum_a \bar{\rho}_a \left[\delta_a^{(\mathrm{GI})} - 3\mathscr{H}(1+w_a)v_a^{(\mathrm{GI})}\right] \tag{7.266}$$

で与えられる．このバーディーン変数 Δ は，物理的に共動ゲージから見た密度ゆらぎに対応するのであった．各成分に対して同様のゲージ不変量を定義する方法は一意的でない．全成分に対するバーディーン変数の定義式 (7.167) の一般化として，少なくとも次の 2 つの定義

$$\Delta_a^{(\mathrm{c})} \equiv \delta_a + \frac{\bar{\rho}'_a}{\bar{\rho}_a}\left(v^{(\mathrm{S})} - B^{(\mathrm{S})}\right) = \delta_a^{(\mathrm{GI})} + \frac{\bar{\rho}'_a}{\bar{\rho}_a} v^{(\mathrm{GI})} \tag{7.267}$$

$$\Delta_a \equiv \delta_a + \frac{\bar{\rho}'_a}{\bar{\rho}_a}\left(v_a^{(\mathrm{S})} - B^{(\mathrm{S})}\right) = \delta_a^{(\mathrm{GI})} + \frac{\bar{\rho}'_a}{\bar{\rho}_a} v_a^{(\mathrm{GI})} \tag{7.268}$$

ができる．ただし以下でも述べるように，成分間に相互作用がある場合は必ずしも $\bar{\rho}'_a = -3\mathscr{H}(\bar{\rho}_a + \bar{p}_a)$ という等式は成り立たないことに注意する．式 (7.267) で定義されるゲージ不変量は，全成分に対する共動ゲージ ($v^{(\mathrm{S})} = B^{(\mathrm{S})}$) から見た密度ゆらぎに対応している．一方，式 (7.268) で定義されるゲージ不変量は，各成分ごとに別々に考えられた共動ゲージ ($v_a^{(\mathrm{S})} = B^{(\mathrm{S})}$) から見たそれぞれの密度ゆらぎに対応している．式 (7.267), (7.268) に $\bar{\rho}_a$ をかけてから成分の和をとり，(7.260), (7.261), (7.167) を用いれば，全成分の密度ゆらぎに対応するバーディーン変数 $\varDelta$ と各成分ゲージ不変量 $\varDelta_a^{(\mathrm{c})}, \varDelta_a$ との間の関係

$$\bar{\rho}\varDelta = \sum_a \bar{\rho}_a \varDelta_a^{(\mathrm{c})} \tag{7.269}$$

$$= \sum_a \bar{\rho}_a \varDelta_a - \sum_a \left[\bar{\rho}'_a + 3\mathscr{H}\bar{\rho}_a(1+w_a)\right] v_a^{(\mathrm{GI})} \tag{7.270}$$

が導かれる．

7.5.3 無衝突多成分系の力学的方程式

全成分のエネルギー運動量テンソルに対する保存則 $T^{\mu}{}_{\nu;\mu} = 0$ はつねに成り立つが，各成分のエネルギー運動量テンソルに対して同じ保存則が成り立つとは限らない．成分間でエネルギーや運動量が交換されると，各成分ごとの保存則は破れる．このことはボルツマン方程式を積分して得られた式 (6.45) からも理解できる．すなわち，成分 a に対するエネルギー運動量テンソル $T_a{}^{\mu\nu}$ の発散は，この成分に対する衝突項 $\mathscr{C}[f_a]$ の積分により

$$T_a{}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 2\int d\Pi\, P^{\mu}\mathscr{C}[f_a] \tag{7.271}$$

で与えられる．右辺の 4 元ベクトルは，成分 a へ他の成分から流入してくるエネルギーと運動量を表している．成分間に相互作用がある場合の考察は，次節でボルツマン方程式を用いて行う．ここでは簡単な場合として，式 (7.271) の右辺の積分が消えて，成分ごとにエネルギー運動量テンソルが保存則

$$T_a{}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \tag{7.272}$$

を満たす場合を考える．重力相互作用以外の直接的な相互作用をしない場合は，衝突項 $\mathscr{C}[f_a]$ 自体がゼロになるため，この条件を満たす．また，相互作用がある場合であっても，その積分量である式 (7.271) の積分が消えて，成分間に実質的なエネルギーや運動量の輸送がなければ，やはりこの条件を満たす．以下では，式

(7.272) を満たす系を無衝突多成分系と呼ぶことにする.

式 (7.272) を仮定すると，単成分系における式 (7.75) 以下の計算がそのまま成り立ち，背景時空における方程式として

$$\bar{\rho}_a' = -3\mathscr{H}(1+w_a)\bar{\rho}_a \tag{7.273}$$

が得られる．上の式は，式 (7.238) を用いて

$$w_a' = -3\mathscr{H}(1+w_a)\left(c_a{}^2 - w_a\right) \tag{7.274}$$

と書き直すこともできる．線形摂動量についても，単成分系における式 (7.83), (7.84) の導出と同様に，

$$\delta_a' + 3\mathscr{H}\left(c_a{}^2 - w_a\right)\delta_a + (1+w_a)\left(v_a{}^i{}_{|i} + C^i{}_i{}'\right) + 3\mathscr{H}w_a\Gamma_a = 0 \tag{7.275}$$

$$(v_{ai} - B_i)' + \mathscr{H}\left(1 - 3c_a{}^2\right)(v_{ai} - B_i) + \frac{c_a{}^2}{1+w_a}\delta_{a|i} + A_{|i} + \frac{w_a}{1+w_a}\left(\Gamma_{a|i} + \Pi_a{}^j{}_{i|j}\right) = 0 \tag{7.276}$$

が得られる．これらの式の SVT 分解は単成分系における式 (7.143)-(7.145) と同様であり，スカラー型成分について

$$\delta_a' + 3\mathscr{H}\left(c_a{}^2 - w_a\right)\delta_a + (1+w_a)\left(\Delta v_a^{(\mathrm{S})} + 3D' + \Delta E^{(\mathrm{S})\prime}\right) + 3\mathscr{H}w_a\Gamma_a = 0 \tag{7.277}$$

$$\left(v_a^{(\mathrm{S})} - B^{(\mathrm{S})}\right)' + \mathscr{H}\left(1 - 3c_a{}^2\right)\left(v_a^{(\mathrm{S})} - B^{(\mathrm{S})}\right) + \frac{c_a{}^2}{1+w_a}\delta_a + A + \frac{w_a}{1+w_a}\left[\Gamma_a + \frac{2}{3}(\Delta + 3K)\Pi_a^{(\mathrm{S})}\right] = 0 \tag{7.278}$$

が得られ，ベクトル型成分について

$$\left(v_a^{(\mathrm{V})}{}_i - B^{(\mathrm{V})}{}_i\right)' + \mathscr{H}\left(1 - 3c_a{}^2\right)\left(v_a^{(\mathrm{V})}{}_i - B^{(\mathrm{V})}{}_i\right) + \frac{w_a}{2(1+w_a)}(\Delta + 2K)\Pi_a^{(\mathrm{V})}{}_i = 0 \tag{7.279}$$

が得られる.

上に得られた無衝突多成分系の力学的方程式を，ゲージ不変量で表しておく．スカラー型成分については，式 (7.277), (7.278) を式 (7.256)-(7.258) で定義されるゲージ不変量で表すことにより，

$$\delta_a^{(\mathrm{GI})\prime} + 3\mathscr{H}\left({c_a}^2 - w_a\right)\delta_a^{(\mathrm{GI})} + (1+w_a)\left(\Delta v_a^{(\mathrm{GI})} + 3\Psi'\right) + 3w_a\mathscr{H}\Gamma_a = 0 \tag{7.280}$$

$$v_a^{(\mathrm{GI})\prime} + \mathscr{H}\left(1 - 3{c_a}^2\right)v_a^{(\mathrm{GI})} + \frac{{c_a}^2}{1+w_a}\delta_a^{(\mathrm{GI})} + \Phi + \frac{w_a}{1+w_a}\left[\Gamma_a + \frac{2}{3}(\Delta + 3K)\Pi_a^{(\mathrm{S})}\right] = 0 \tag{7.281}$$

が得られ，ゲージ不変量だけで表された方程式になる．これは単成分の場合の式 (7.158) および (7.159) と同様の形をしている．ベクトル型成分については，式 (7.279) を式 (7.259) で定義されるゲージ不変量で表すことにより，

$$v_a^{(\mathrm{VGI})}{}_i + \mathscr{H}\left(1 - 3{c_a}^2\right)v_a^{(\mathrm{VGI})}{}_i + \frac{w_a}{2(1+w_a)}(\Delta + 2K)\Pi_a^{(\mathrm{V})}{}_i = 0 \tag{7.282}$$

が得られ，やはりゲージ不変量だけで表された方程式になる．これは単成分の場合の式 (7.166) と同様の形をしている．

無衝突多成分系の場合に成り立つ式 (7.273) を用いると，式 (7.239) の第 2 式と式 (7.62) により，

$$(1+w)\bar{\rho}{c_\mathrm{s}}^2 = \sum_a (1+w_a)\bar{\rho}_a {c_a}^2 \tag{7.283}$$

が得られる．すると，エントロピーゆらぎを与える式 (7.244) は

$$\bar{p}\Gamma = \sum_a \bar{p}_a\Gamma_a + \frac{1}{2\bar{\rho}(1+w)}\sum_{a,b}\bar{\rho}_a(1+w_a)\bar{\rho}_b(1+w_b)\left({c_a}^2 - {c_b}^2\right)S_{ab} \tag{7.284}$$

と変形できる．ここで，

$$S_{ab} = \frac{\delta_a}{1+w_a} - \frac{\delta_b}{1+w_b} \tag{7.285}$$

と定義した．式 (7.284) の右辺第 1 項は，各成分のエントロピーゆらぎからの単純な寄与である．第 2 項はそれ以外にも全体のエントロピーゆらぎへの寄与があることを表している．音速の異なる 2 つの成分について，規格化された密度ゆらぎの差 S_{ab} がゼロでなければ，それが全体のエントロピーゆらぎに寄与する．ゲージ変換の式 (7.250) によれば，式 (7.273) が成り立つ無衝突多成分系において，この量 S_{ab} はゲージ不変量になる．

式 (7.285) を時間微分してから，式 (7.274), (7.277) を用いると，

$$S_{ab}{}' = -\Delta V_{ab} - 3\mathscr{H}\Gamma_{ab} \tag{7.286}$$

という単純な式が得られる．ただし，

$$V_{ab} \equiv v_a^{(\mathrm{S})} - v_b^{(\mathrm{S})}, \qquad \Gamma_{ab} \equiv \frac{w_a \Gamma_a}{1+w_a} - \frac{w_b \Gamma_b}{1+w_b} \tag{7.287}$$

と定義した．式 (7.245), (7.250)–(7.252) により，上で定義される量 V_{ab}, Γ_{ab} はゲージ不変量である．したがって，式 (7.286) はそのままゲージ不変な式になっている．この式により，成分間の速度差 V_{ab} がエントロピーゆらぎの時間発展に寄与することがわかる．そこで，速度差の発展方程式を導いておくと便利である．次の恒等式

$$\sum_c \frac{\bar{\rho}_c(1+w_c)}{\bar{\rho}(1+w)} S_{ac} = \frac{\delta_a}{1+w_a} - \frac{\delta}{1+w} \tag{7.288}$$

$$\sum_c \frac{\bar{\rho}_c(1+w_c)}{\bar{\rho}(1+w)} V_{ac} = v_a^{(\mathrm{S})} - v^{(\mathrm{S})} \tag{7.289}$$

が成り立つことを用いて，式 (7.278) の差を変形すると

$$\begin{aligned}
&V_{ab}' + \mathscr{H} V_{ab} - \frac{3}{2}\mathscr{H}\left[\left({c_a}^2 + {c_b}^2\right) V_{ab} + \frac{{c_a}^2 - {c_b}^2}{\bar{\rho}(1+w)} \sum_c \bar{\rho}_c (1+w_c)(V_{ac} + V_{bc})\right] \\
&\quad = -\frac{{c_a}^2 - {c_b}^2}{1+w} \varDelta - \frac{1}{2}\left[\left({c_a}^2 + {c_b}^2\right) S_{ab} + \frac{{c_a}^2 - {c_b}^2}{\bar{\rho}(1+w)} \sum_c \bar{\rho}_c(1+w_c)(S_{ac} + S_{bc})\right] \\
&\qquad - \Gamma_{ab} - \frac{2}{3}(\Delta + 3K)\Pi_{ab}
\end{aligned} \tag{7.290}$$

が導かれる．ここで，$\varDelta$ は式 (7.167) で与えられる全成分に対するバーディーン変数であり，また

$$\Pi_{ab} \equiv \frac{w_a \Pi_a}{1+w_a} - \frac{w_b \Pi_b}{1+w_b} \tag{7.291}$$

と定義した．明らかに式 (7.290) もゲージ不変な式になっている．

7.6 線形ボルツマン方程式

エネルギー成分間に直接の相互作用があって，エネルギーや運動量が輸送される場合，ここまで考えてきたアインシュタイン方程式だけでは，物理量の時間発展の記述として完全ではない．ボルツマン方程式 (6.42) を用いることで，各成分の時間発展を記述することができる．粒子種 a に対するボルツマン方程式は，

$$P^\mu \frac{\partial f_a}{\partial x^\mu} - \Gamma^\mu_{\nu\lambda} P^\nu P^\lambda \frac{\partial f_a}{\partial P^\mu} = \mathscr{C}_a[f_a] \tag{7.292}$$

で与えられる．ここで $f_a, \mathscr{C}_a$ は，それぞれこの粒子種に対する分布関数と衝突項である．左辺のクリストッフェル記号に式 (7.8)-(7.13) を代入して，線形近似を適用すると，

$$\begin{aligned}
&f_a{}' + \frac{P^i}{P^0}\frac{\partial f_a}{\partial x^i} - \left[\mathscr{H}\left(P^0 + \frac{\gamma_{ij}P^iP^j}{P^0}\right) + P^0 A' + 2P^i\left(A_{|i} - \mathscr{H}B_i\right)\right.\\
&\qquad\left. + \frac{P^iP^j}{P^0}\left(-2\mathscr{H}\gamma_{ij}A + B_{i|j} + C_{ij}{}' + 2\mathscr{H}C_{ij}\right)\right]\frac{\partial f_a}{\partial P^0}\\
&\quad - \left[2\mathscr{H}P^i + {}^{(3)}\Gamma^i_{jk}\frac{P^jP^k}{P^0} + P^0\left(A^{|i} - B^{i\prime} - \mathscr{H}B^i\right) + P^j\left(B_j{}^{|i} - B^i{}_{|j} + 2C^i{}_j{}'\right)\right.\\
&\qquad\left. + \frac{P^jP^k}{P^0}\left(\mathscr{H}\gamma_{jk}B^i + 2C^i{}_{j|k} - C_{jk}{}^{|i}\right)\right]\frac{\partial f_a}{\partial P^i}\\
&\qquad\qquad = \frac{\mathscr{C}_a[f_a]}{P^0} = \left.\frac{df_a}{d\tau}\right|_{\rm coll}
\end{aligned} \tag{7.293}$$

が得られる．ただし $df_a/d\tau|_{\rm coll} = \mathscr{C}_a[f_a]/P^0$ は単位共形時間あたりの衝突項を表す．ここで 4 元運動量ベクトル P^μ に対する質量殻の条件 $P^\mu P_\mu + m^2 = 0$ は，摂動の線形近似において，

$$\left(P^0\right)^2 - \gamma_{ij}P^iP^j - \frac{m^2}{a^2} + 2\left(P^0\right)^2 A + 2P^0P^iB_i - 2P^iP^jC_{ij} = 0 \tag{7.294}$$

と表される．この条件から 4 元運動量 P^μ の独立成分は 3 つである．

運動量空間は各時空点の接空間とみなされる．その接空間の基底に 1.2.5 項で説明した 4 脚場 $\mathrm{e}^{(\alpha)}_\mu, \mathrm{e}^\mu_{(\alpha)}$ を用いると便利である．式 (1.132) の第 2 式により，この 4 脚場は

$$g^{\mu\nu}\mathrm{e}^{(0)}_\mu\mathrm{e}^{(0)}_\nu = -1, \quad g^{\mu\nu}\mathrm{e}^{(0)}_\mu\mathrm{e}^{(i)}_\nu = 0, \quad g^{\mu\nu}\mathrm{e}^{(i)}_\mu\mathrm{e}^{(j)}_\nu = \delta_{ij} \tag{7.295}$$

を満たす．第 3 式における局所平坦空間の添字 i, j はユークリッド空間に対するものなので，その添字位置の上下は区別しない．4 脚場を具体的に選ぶため，時間方向の基底 $\mathrm{e}^{(0)}_\mu$ を時間一定面に垂直な方向にとることにすると，この量は δ^0_μ に比例する．その比例定数は式 (7.295) の第 1 式と式 (7.7) の第 1 式によって一意的に定めることができ，

$$\mathrm{e}^{(0)}_\mu = a(1 + A)\delta^0_\mu \tag{7.296}$$

が得られる．次に，式 (7.295) の第 2 式と式 (7.7) の第 2 式を用いると，線形近似により

$$\mathrm{e}^{(i)}_0 = -B^j \mathrm{e}^{(i)}_j \tag{7.297}$$

という関係が導かれる．最後に式 (7.295) の第 3 式と式 (7.7) の第 3 式を用いると，線形近似により

$$\left(\gamma^{kl} - 2C^{kl}\right) \mathrm{e}^{(i)}_k \mathrm{e}^{(j)}_l = a^2 \delta_{ij} \tag{7.298}$$

となる．

ここで 3 次元一様等方空間における 3 次元直交基底を $\hat{\mathrm{e}}^{(i)}_j$ とする．この基底は

$$\gamma^{kl} \hat{\mathrm{e}}^{(i)}_k \hat{\mathrm{e}}^{(j)}_l = \delta_{ij} \tag{7.299}$$

を満たすものとして定義する．この 3 次元基底を用いると，

$$\mathrm{e}^{(i)}_j = a\left(\delta^k_j + C_j{}^k\right) \hat{\mathrm{e}}^{(i)}_k \tag{7.300}$$

とおくことにより，式 (7.298) を満たすことができる．式 (7.300) を式 (7.297) へ代入すると，線形近似により

$$\mathrm{e}^{(i)}_0 = -aB^j \hat{\mathrm{e}}^{(i)}_j \tag{7.301}$$

となる．以上の式 (7.296), (7.300), (7.301) をまとめて

$$\mathrm{e}^{(\alpha)}_\mu = a\left[\delta^\alpha_0 \delta^0_\mu (1 + A) + \delta^\alpha_i \left(\delta^j_\mu \delta^k_j - \delta^0_\mu B^k + \delta^j_\mu C_j{}^k\right) \hat{\mathrm{e}}^{(i)}_k\right] \tag{7.302}$$

と表すことができる．さらに式 (1.131) に与えられた関係式

$$\mathrm{e}^{(\alpha)}_\mu \mathrm{e}^{\ \nu}_{(\alpha)} = \delta^\nu_\mu, \qquad \mathrm{e}^{(\alpha)}_\mu \mathrm{e}^{\ \mu}_{(\beta)} = \delta^\alpha_\beta \tag{7.303}$$

を満たす条件から

$$\mathrm{e}^{\ \mu}_{(\alpha)} = \frac{1}{a}\left[\delta^0_\alpha \delta^\mu_0 (1 - A) + B^j \delta^0_\alpha \delta^\mu_j + \delta^i_\alpha \delta^\mu_j \left(\delta^j_k - C^j{}_k\right) \hat{\mathrm{e}}^{\ k}_{(i)}\right] \tag{7.304}$$

が得られる．上の構成により，$\hat{\mathrm{e}}^{\ j}_{(i)}$ は 3 次元一様等方空間の双対基底であり

$$\hat{\mathrm{e}}^{(k)}_i \hat{\mathrm{e}}^{\ j}_{(k)} = \delta^j_i, \quad \hat{\mathrm{e}}^{(i)}_k \hat{\mathrm{e}}^{\ k}_{(j)} = \delta^i_j \tag{7.305}$$

を満たすものとして定義されている．

上のように構成した 4 脚場を基底として，4 元運動量を展開した成分は $P^\mu \mathrm{e}^{(\alpha)}_\mu$ で与えられる．これにスケール因子をかけた 4 元ベクトルを

$$q^\alpha = aP^\mu \mathrm{e}^{(\alpha)}_\mu \tag{7.306}$$

と定義すると，その成分は

$$q^0 = a^2(1+A)P^0, \quad q^i = a^2\left(P^j - B^j P^0 + C^j{}_k P^k\right)\hat{\mathrm{e}}^{(i)}_j \tag{7.307}$$

である．ここで式 (7.303) の性質により

$$P^\mu = \frac{1}{a} q^\alpha \mathrm{e}^{\ \mu}_{(\alpha)} \tag{7.308}$$

となるから，式 (7.304) を用いれば

$$P^0 = \frac{1}{a^2}(1-A)q^0, \quad P^i = \frac{1}{a^2}\left(q^j \hat{\mathrm{e}}^{\ i}_{(j)} + B^i q^0 - C^i{}_k q^j \hat{\mathrm{e}}^{\ k}_{(j)}\right) \tag{7.309}$$

が得られる．これは式 (7.307) を逆に解いたものになっている．

ここで，式 (7.309) と式 (1.133) の第 1 式に与えられる 4 脚場の性質により，

$$P^\mu P_\mu = g_{\mu\nu}P^\mu P^\nu = \frac{1}{a^2}\eta_{\alpha\beta}q^\alpha q^\beta = \frac{1}{a^2}\left[\delta_{ij}q^i q^j - \left(q^0\right)^2\right] \tag{7.310}$$

が成り立つ．したがって質量殻の条件式 (6.1) は

$$q^0 = \sqrt{\delta_{ij}q^i q^j + m^2 a^2} \tag{7.311}$$

となる．ただし，q^0 はエネルギーに比例する量なので，正の量である．この条件は式 (7.294) と等価であるが，局所座標系の導入によって簡単な形になっている．この式 (7.311) により q^0 を従属変数と考えると，4 つの変数 q^α のうち 3 つの空間成分 q^i を独立変数とみなすことができる．分布関数 f_a の背景成分は運動量の絶対値にしか依存しないので，ベクトル q^i を動径成分 q とそれ以外の方向成分に分解すると都合がよい．そこで

$$q \equiv \sqrt{\delta_{ij}q^i q^j} = \sqrt{\left(q^0\right)^2 - m^2 a^2}, \quad n^i \equiv \frac{1}{q} q^j \hat{\mathrm{e}}^{\ i}_{(j)} \tag{7.312}$$

という変数を定義する．ここで定義される方向ベクトル n^i は一様等方空間上の 3 次元ベクトルになっているので，その添字は計量 γ_{ij} で上げ下げする．この変数の組 (q, n^i) を運動量空間の独立変数と考える．式 (7.312) により

$$q^0 = \sqrt{q^2 + m^2 a^2}, \quad q^j \hat{\mathrm{e}}^{\ i}_{(j)} = q n^i \tag{7.313}$$

が成り立つ．これらを式 (7.309) へ代入すれば，4 元運動量 P^μ の成分は

$$P^0 = \frac{\sqrt{q^2+m^2a^2}}{a^2}(1-A), \quad P^i = \frac{1}{a^2}\left(qn^i + B^i\sqrt{q^2+m^2a^2} - C^i{}_j qn^j\right) \tag{7.314}$$

で与えられる．ここからさらに添字を下げた量を求めると，

$$P_0 = -\sqrt{q^2+m^2a^2}(1+A) - B_i qn^i, \quad P_i = qn_i + C_{ij}qn^j \tag{7.315}$$

が得られる．

運動量空間の独立変数 (q,n^i) を用いてボルツマン方程式 (7.293) を表し直す．このとき，変数変換の係数が時空座標に依存しているので，偏微分は

$$\frac{\partial f_a}{\partial \tau} \to \frac{\partial f_a}{\partial \tau} + \frac{\partial q}{\partial \tau}\frac{\partial f_a}{\partial q} + \frac{\partial n^i}{\partial \tau}\frac{\partial f_a}{\partial n^i} \tag{7.316}$$

$$\frac{\partial f_a}{\partial x^i} \to \frac{\partial f_a}{\partial x^i} + \frac{\partial q}{\partial x^i}\frac{\partial f_a}{\partial q} + \frac{\partial n^j}{\partial x^i}\frac{\partial f_a}{\partial n^j} \tag{7.317}$$

$$\frac{\partial f_a}{\partial P^\mu} \to \frac{\partial q}{\partial P^\mu}\frac{\partial f_a}{\partial q} + \frac{\partial n^i}{\partial P^\mu}\frac{\partial f_a}{\partial n^i} \tag{7.318}$$

と置き換えられることに注意する．ただし，右辺で偏微分されている変数 q,n^i はどちらも τ, x^i, p^μ を独立変数に持つ関数とみなされ，その具体形は式 (7.307), (7.312) から求められる．また，分布関数を背景成分 $\bar{f}_a$ と摂動成分 δf_a に分解すると，背景成分は変数 x^i, n^i に依存しないので，

$$f_a(q,n^i,x^i,\tau) = \bar{f}_a(q,\tau) + \delta f_a(q,n^i,x^i,\tau) \tag{7.319}$$

という変数依存性となる．以上に注意して，線形ボルツマン方程式 (7.293) を線形近似によって変形すると，比較的簡単な式

$$\begin{aligned} &f_a{}' + \frac{qn^i}{\sqrt{q^2+m^2a^2}}\frac{\partial \delta f_a}{\partial x^i} - \left[\frac{\sqrt{q^2+m^2a^2}}{q}n^i A_{|i} + (B_{i|j} + C_{ij}{}')n^i n^j\right] q\frac{\partial f_a}{\partial q} \\ &- \frac{q}{\sqrt{q^2+m^2a^2}}{}^{(3)}\Gamma^i_{jk} n^j n^k \frac{\partial \delta f_a}{\partial n^i} = \frac{a^2}{\sqrt{q^2+m^2a^2}}(1+A)\mathscr{C}_a[f_a] = \left.\frac{df_a}{d\tau}\right|_{\mathrm{coll}} \end{aligned} \tag{7.320}$$

が得られる．この式から背景成分をとり出すと，

$$\bar{f}_a{}' = \frac{a^2}{\sqrt{q^2+m^2a^2}}\bar{\mathscr{C}}_a[\bar{f}_a] = \left.\frac{d\bar{f}_a}{d\tau}\right|_{\mathrm{coll}} \tag{7.321}$$

となる．ここで $\bar{\mathscr{C}}_a, d\bar{f}_a/d\tau|_{\mathrm{coll}}$ は衝突項の背景成分である．また線形摂動成分は

$$
\delta f_a{}' + \frac{qn^i}{\sqrt{q^2+m^2a^2}}\frac{\partial \delta f_a}{\partial x^i} - \left[\frac{\sqrt{q^2+m^2a^2}}{q}n^i A_{|i} + (B_{i|j} + C_{ij}{}')n^i n^j\right] q\frac{\partial \bar{f}_a}{\partial q}
$$
$$
- \frac{q}{\sqrt{q^2+m^2a^2}}{}^{(3)}\Gamma^i_{jk} n^j n^k \frac{\partial \delta f_a}{\partial n^i} = \frac{a^2}{\sqrt{q^2+m^2a^2}}\left(\delta\mathscr{C}_a[f_a] + A\bar{\mathscr{C}}_a[\bar{f}_a]\right) = \left.\frac{d\delta f_a}{d\tau}\right|_{\mathrm{coll}} \tag{7.322}
$$

となる．ここで $\delta\mathscr{C}_a[f_a]$ は衝突項の線形摂動部，$d\delta f_a/d\tau|_{\mathrm{coll}}$ は共形時間あたりの衝突項の線形摂動部である．

アインシュタイン方程式に現れる巨視的変数は，分布関数の運動量積分で表される．エネルギー運動量テンソルは式 (6.17) と同様に，

$$
T_a{}^{\mu}{}_{\nu} = 2\int d\Pi P^{\mu} P_{\nu} f_a \tag{7.323}
$$

で与えられる．ここで，運動量要素 $d\Pi$ は式 (6.2) で与えられるように，

$$
d\Pi = \frac{\sqrt{-g}d^4P}{(2\pi)^3}\Theta\left(P^0\right)\delta\left(g_{\mu\nu}P^{\mu}P^{\nu} + m^2\right) \tag{7.324}
$$

であり，これは座標変換に対する不変量である．4 脚場の行列式は式 (1.134) で与えられるように $\det(\mathrm{e}^{(\alpha)}_{\mu}) = \sqrt{-g}$ であるから，変数変換の式 (7.306) による積分要素の変換は

$$
\sqrt{-g}d^4P = \frac{d^4q}{a^4} \tag{7.325}
$$

となる．この式と式 (7.310) を運動量要素の式 (7.324) へ代入し，さらにデルタ関数の性質 (B.3) を用いると，

$$
d\Pi = \frac{d^4q}{(2\pi)^3a^4}\Theta\left(q^0\right)a^2\delta\left[\left(q^0\right)^2 - q^2 - m^2a^2\right] = \frac{d^4q}{(2\pi)^3 2a^2 q^0}\delta\left(q^0 - \sqrt{q^2+m^2a^2}\right)
$$
$$
\to \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2a^2\sqrt{q^2+m^2a^2}} \tag{7.326}
$$

となる．ただし，最後の式は従属変数である q^0 について積分した形を与えた．

局所平坦空間の 3 次元ベクトルである q^i に対する積分要素は，立体角積分要素を $d\Omega_q$ として

$$
d^3q = q^2 dq d\Omega_q \tag{7.327}
$$

で与えられる．ここで q は式 (7.312) で定義される量に等しい．また，そこで定義された量 n^i は，空間反転について $n^i \to -n^i$ と変換する．このことから，n^i の奇数

個の積の立体角積分は，逆方向の寄与が打ち消し合って必ずゼロになる．また偶数個の積を立体角積分すると，そのテンソル性からクロネッカー・デルタ δ^i_j や 3 次元計量 γ_{ij} だけで表現できる．またその比例係数は添字について縮約することで決定することができる．こうして，恒等式

$$\int \frac{d\Omega_q}{4\pi} n^i = \int \frac{d\Omega_q}{4\pi} n^i n^j n^k = 0, \quad \int \frac{d\Omega_q}{4\pi} n^i n_j = \frac{1}{3}\delta^i_j \tag{7.328}$$

が導かれる．これらの式を用いると，n^i に依存しない背景時空の分布関数 $\bar{f}_a$ の立体角積分を実行できる．式 (7.314), (7.315) をエネルギー運動量テンソルの式 (7.323) に代入し，上の立体角積分を用いて線形近似により計算すると

$$T_a{}^0{}_0 = -\frac{1}{a^4}\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \sqrt{q^2 + m^2a^2}\left(\bar{f}_a + \delta f_a\right) \tag{7.329}$$

$$T_a{}^0{}_i = \frac{1}{a^4}\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} q n_i \delta f_a \tag{7.330}$$

$$T_a{}^i{}_j = \frac{1}{a^4}\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q^2}{\sqrt{q^2 + m^2a^2}}\left(\frac{1}{3}\delta^i_j \bar{f} + n^i n_j \delta f_a\right) \tag{7.331}$$

が得られる．これらの式と，式 (7.233), (7.234), (7.236) を比較することにより，エネルギー密度 ρ_a, 圧力 p_a，速度 v_{ai}, および非等方ストレス $\Pi_a{}^i{}_j$ の背景成分と摂動成分は

$$\bar{\rho}_a = -\bar{T}_a{}^0{}_0 = \frac{1}{a^4}\int \frac{q^2 dq}{2\pi^2} \sqrt{q^2 + m^2a^2}\, \bar{f}_a \tag{7.332}$$

$$\bar{p}_a = \frac{1}{3}\bar{T}_a{}^i{}_i = \frac{1}{3a^4}\int \frac{q^2 dq}{2\pi^2} \frac{q^2}{\sqrt{q^2 + m^2a^2}} \bar{f}_a \tag{7.333}$$

および

$$\delta\rho_a = -\delta T_a{}^0{}_0 = \frac{1}{a^4}\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \sqrt{q^2 + m^2a^2}\, \delta f_a \tag{7.334}$$

$$v_{a\,i} - B_i = \frac{T_a{}^0{}_i}{\bar{\rho}_a + \bar{p}_a} = \frac{1}{a^4(\bar{\rho}_a + \bar{p}_a)}\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} q n_i \delta f_a \tag{7.335}$$

$$\delta p_a = \frac{1}{3}\delta T_a{}^i{}_i = \frac{1}{3a^4}\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q^2}{\sqrt{q^2 + m^2a^2}}\, \delta f_a \tag{7.336}$$

$$\Pi_a{}^i{}_j = \frac{1}{\bar{p}_a}\left(T_a{}^i{}_j - \frac{1}{3}\delta^i_j T_a{}^k{}_k\right) = \frac{1}{a^4\bar{p}_a}\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{q^2}{\sqrt{q^2 + m^2a^2}}\left(n^i n_j - \frac{1}{3}\delta^i_j\right)\delta f_a \tag{7.337}$$

で与えられる．ただし，$\bar{T}_a{}^\mu{}_\nu$, $\delta T_a{}^\mu{}_\nu$ はそれぞれエネルギー運動量テンソルの背景

成分と線形摂動成分である．

最後に分布関数のゲージ変換について調べ，ゲージ不変量との関係を導いておく．まず，粒子の運動量は場の量ではないため，ベクトル場とは異なるゲージ変換をすることに注意する．粒子の運動量はアフィン・パラメータ λ を用いて $P^\mu = dx^\mu/d\lambda$ で与えられるので，座標変換 $x^\mu \to \tilde{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu$ に対する変換は

$$P^\mu \to \tilde{P}^\mu = P^\mu + \xi^\mu{}_{,\nu} P^\nu \tag{7.338}$$

となる．さらに，式 (7.307) の変数 q^0 に関係する変数のゲージ変換は

$$a(\tau) \to a(\tilde{\tau}) = a(\tau) + a\mathscr{H}T \tag{7.339}$$

$$P^0 \to \tilde{P}^0 = P^0 + P^0 T' + P^i T_{,i} \tag{7.340}$$

$$A \to \tilde{A} = A - T' - \mathscr{H}T \tag{7.341}$$

となり，さらに式 (7.307) 第 1 式と式 (7.312) 第 1 式により，

$$q \to \tilde{q} = q + q\mathscr{H}T + \sqrt{q^2 + m^2a^2}\, n^i T_{,i} \tag{7.342}$$

が得られる．分布関数 $f_a(x^\mu, q, n^i)$ はスカラー関数であるから，そのゲージ変換は $\tilde{f}_a(\tilde{x}^\mu, \tilde{q}, \tilde{n}^i) = f_a(x^\mu, q, n^i)$ を満たす．ここで背景成分 $\bar{f}_a$ には方向依存性がないので，変数 n^i のゲージ変換によって分布関数の線形摂動成分は変化しない．このことに注意して線形摂動成分のゲージ変換を計算すると，

$$\widetilde{\delta f}_a = \delta f_a - \bar{f}_a{}' T - \left(\mathscr{H}T + \frac{\sqrt{q^2 + m^2a^2}}{q} n^i T_{,i} \right) q \frac{\partial \bar{f}_a}{\partial q} \tag{7.343}$$

となる．このゲージ変換には摂動のスカラー型成分しか含まれていない．このゲージ変換と，計量のゲージ変換の式 (7.113)–(7.116) により，ゲージ不変な分布関数の摂動として

$$\begin{aligned}\delta f_a^{(\mathrm{GI})} \equiv{}& \delta f_a - \bar{f}_a{}' \left(B^{(\mathrm{S})} + E^{(\mathrm{S})\prime} \right) \\ &- \left[\mathscr{H} \left(B^{(\mathrm{S})} + E^{(\mathrm{S})\prime} \right) + \frac{\sqrt{q^2 + m^2a^2}}{q} n^i \left(B^{(\mathrm{S})} + E^{(\mathrm{S})\prime} \right)_{,i} \right] q \frac{\partial \bar{f}_a}{\partial q}\end{aligned} \tag{7.344}$$

を定義することができる．このゲージ不変分布関数を用いて摂動ボルツマン方程式 (7.322) を書き直す．背景成分の方程式 (7.321) を用いて $\bar{f}_a$ の時間微分を消しながら注意深く計算することにより，

$$\delta f_a^{(\mathrm{GI})\prime} + \frac{qn^i}{\sqrt{q^2+m^2a^2}}\frac{\partial \delta f_a^{(\mathrm{GI})}}{\partial x^i} - \left(\frac{\sqrt{q^2+m^2a^2}}{q}n^i\Phi_{|i} + \Psi'\right)q\frac{\partial \bar{f}_a}{\partial q}$$
$$- \frac{q}{\sqrt{q^2+m^2a^2}}{}^{(3)}\Gamma^i_{jk}n^j n^k \frac{\partial \delta f_a^{(\mathrm{GI})}}{\partial n^i} = \frac{a^2}{\sqrt{q^2+m^2a^2}}\left(\delta\mathscr{C}_a^{(\mathrm{GI})}[f_a] + \Phi\overline{\mathscr{C}}_a[\bar{f}_a]\right) \quad (7.345)$$

が得られる．ただし，

$$\delta\mathscr{C}_a^{(\mathrm{GI})} \equiv \delta\mathscr{C}_a - \overline{\mathscr{C}_a}'\left(B^{(\mathrm{S})} + E^{(\mathrm{S})\prime}\right)$$
$$- \left[\mathscr{H}\left(B^{(\mathrm{S})} + E^{(\mathrm{S})\prime}\right) + \frac{\sqrt{q^2+m^2a^2}}{q}n^i\left(B^{(\mathrm{S})} + E^{(\mathrm{S})\prime}\right)_{,i}\right]q\frac{\partial\overline{\mathscr{C}}_a}{\partial q} \quad (7.346)$$

と定義した．これは衝突項の線形摂動に対するゲージ不変量である．衝突項は x^μ, q, n^i の関数として分配関数と同様にスカラーとして変換するから，このゲージ不変量の定義が分布関数における式 (7.344) に類似していることも自然である．

流体のゲージ不変な巨視的変数は，式 (7.256)-(7.258) に与えられている．式 (7.334)-(7.337), (7.344) を用いると，ゲージ不変な分布関数との間に

$$\delta_a^{(\mathrm{GI})} = \frac{\delta\rho_a}{\bar{\rho}_a} - \frac{\bar{\rho}_a{}'}{\bar{\rho}_a}\left(B^{(\mathrm{S})} + E^{(\mathrm{S})\prime}\right) = \frac{1}{a^4\bar{\rho}_a}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\sqrt{q^2+m^2a^2}\,\delta f_a^{(\mathrm{GI})} \quad (7.347)$$

$$v_a^{(\mathrm{GI})}{}_{|i} \equiv v_{a|i}^{(\mathrm{S})} + E^{(\mathrm{S})}{}_{|i}{}' = \frac{1}{a^4\left(\bar{\rho}_a + \bar{p}_a\right)}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}qn_i\,\delta f_a^{(\mathrm{GI})} \quad (7.348)$$

$$\delta p_a^{(\mathrm{GI})} = \delta p_a - \bar{p}_a{}'\left(B^{(\mathrm{S})} + E^{(\mathrm{S})\prime}\right) = \frac{1}{3a^4}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{q^2}{\sqrt{q^2+m^2a^2}}\delta f_a^{(\mathrm{GI})} \quad (7.349)$$

$$\Pi_a^{(\mathrm{S})|i}{}_{|j} - \frac{1}{3}\delta^i_j\Delta\Pi_a^{(\mathrm{S})} = \frac{1}{a^4\bar{p}_a}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{q^2}{\sqrt{q^2+m^2a^2}}\left(n^in_j - \frac{1}{3}\delta^i_j\right)\delta f_a^{(\mathrm{GI})} \quad (7.350)$$

という関係が示される．したがって，上で定義したゲージ不変な分布関数 $\delta f_a^{(\mathrm{GI})}$ は，流体の巨視的変数に対して定義したゲージ不変量 $\delta_a^{(\mathrm{GI})}, \delta p_a^{(\mathrm{GI})}, v_a^{(\mathrm{GI})}$ を自然に与えるものになっている．

ベクトル型摂動についてのボルツマン方程式は，式 (7.320) のベクトル型成分をとれば得られる．式 (7.162) のベクトル型ゲージ不変ポテンシャル ψ_i を用いることにより，その方程式は

$$\delta f_a^{(\mathrm{V})\prime} + \frac{qn^i}{\sqrt{q^2+m^2a^2}}\frac{\partial \delta f_a^{(\mathrm{V})}}{\partial x^i} - \psi_{i|j}n^i n^j q\frac{\partial \bar{f}_a}{\partial q}$$

$$- \frac{q}{\sqrt{q^2+m^2a^2}}{}^{(3)}\Gamma^i_{\ jk}n^j n^k \frac{\partial \delta f_a^{(\mathrm{V})}}{\partial n^i} = \frac{a^2}{\sqrt{q^2+m^2a^2}}\delta\mathscr{C}^{(\mathrm{V})}[f_a] = \left.\frac{d\delta f_a^{(\mathrm{V})}}{d\tau}\right|_{\mathrm{coll}} \tag{7.351}$$

となる．ここで δf_a のゲージ変換 (7.343) はベクトル型成分について不変であるから，$\delta f_a^{(\mathrm{V})}$ はそのままゲージ不変量である．また，右辺は衝突項のベクトル型成分であり，左辺がゲージ不変量なので，衝突項もゲージ不変量である．

最後に，式 (7.320) のテンソル型成分をとれば，テンソル型摂動の方程式は

$$\delta f_a^{(\mathrm{T})\prime} + \frac{qn^i}{\sqrt{q^2+m^2a^2}}\frac{\partial \delta f_a^{(\mathrm{T})}}{\partial x^i} - E_{ij}^{(\mathrm{T})\prime}n^i n^j q\frac{\partial \bar{f}_a}{\partial q}$$

$$- \frac{q}{\sqrt{q^2+m^2a^2}}{}^{(3)}\Gamma^i_{\ jk}n^j n^k \frac{\partial \delta f_a^{(\mathrm{T})}}{\partial n^i} = \frac{a^2}{\sqrt{q^2+m^2a^2}}\delta\mathscr{C}^{(\mathrm{T})}[f_a] = \left.\frac{d\delta f_a^{(\mathrm{T})}}{d\tau}\right|_{\mathrm{coll}} \tag{7.352}$$

となる．この方程式に現れる量はすべてゲージ不変量である．

第8章
インフレーション理論と初期密度ゆらぎ

現在の宇宙にある豊富な構造の起源は何だろうか．宇宙原理がスケールによらず完全に成り立っているならば，宇宙に構造が生まれることはない．初期の宇宙には，現在見られる構造の種となる密度ゆらぎが存在したはずである．これを**初期密度ゆらぎ** (initial density fluctuations) という．初期密度ゆらぎがあれば，そのゆらぎを元にして，重力をはじめとする相互作用により現在の宇宙にある構造を形成することができる．初期密度ゆらぎの生成が実際にどのように起きたのか，いまだ完全な解明には至っていない．現在のところ有望視されている可能性として，インフレーション理論に基づいた初期密度ゆらぎの生成がある．この章で扱う内容は，本書の他の章に比べると，まだ実験的あるいは観測的に十分な実証を経ているわけではない．このため，理論的に流動的な面があることを注意しておく．

8.1　インフレーション理論

標準ビッグバン理論は，宇宙の初期条件に対して不自然さを抱えている．1980年代初頭，その不自然さを解消し得る可能性として，インフレーション理論が提案された．さらにこの理論は初期密度ゆらぎの生成機構も持っている．このため，標準ビッグバン理論が扱える範囲を超えて，初期宇宙の様子を記述し得る理論としてとくに有望視されている．この最初の節では，インフレーション理論の考え方について，その概要を簡潔に述べておく．

8.1.1　標準ビッグバン理論の不自然さ

標準ビッグバン理論は，観測される宇宙の性質を非常によく説明する．ところが，宇宙がどのような状態から始まったかという初期条件をこの理論によって考えると，そこにはあまりにも不自然な状況が現れる．このことがインフレーション理

論を考える動機になっている.

ホライズン問題

我々が観測できる宇宙の範囲では，大きなスケールにおいて宇宙原理がよく成り立っている．宇宙には銀河や銀河団といった構造よりもさらに大きい，超銀河団やボイド構造と呼ばれる大構造がある．そうした宇宙の大規模構造は 100 h^{-1}Mpc 程度のサイズまで顕著である．だが，そのサイズを大きく超えるスケールで見れば，あまり目立った構造は見られなくなる．さらに，宇宙マイクロ波背景放射は非常によい精度で等方的な性質を持っている．これらのことにより，現在の宇宙は，ハッブル半径 $1/H_0$ 程度の大スケールに着目する限り，かなりの精度で一様等方宇宙とみなすことができる.

標準ビッグバン理論によれば，宇宙初期に遡るほどホライズンの大きさは小さい．スケール因子の時間変化が $a(t) \propto t^\alpha$ のように時間のべき乗で与えられるとき，$0 < \alpha < 1$ であれば減速膨張する．標準ビッグバン理論では，放射優勢期に $\alpha = 1/2$，物質優勢期に $\alpha = 2/3$ となり，いずれの時期でも減速膨張する．式 (2.46) によれば，共動座標の粒子ホライズンの半径 $L_{\rm H}$ は $t^{1-\alpha}$ に比例して増大することがわかる．したがって，現在時刻で粒子ホライズンの距離だけ離れた任意の 2 点は，現在かろうじて因果関係を持つことができるようになったのであり，過去には一度も因果関係を持ったことがないことになる．それにもかかわらず，同じ密度を持っているのは不自然である．お互いのことをまったく知らない場所どうしが，初期条件として同じ状態から始まるのはなぜだろうか．この問題は，宇宙の**ホライズン問題** (horizon problem) と呼ばれる.

平坦性問題

観測的に宇宙の曲率はきわめてゼロに近いことが知られ，現在のところ有限の値を持っているという証拠はない．このことは，現在の宇宙において，曲率半径がハッブル半径よりずっと大きいことを意味する．式 (2.1), (2.4) に与えられるロバートソン-ウォーカー計量の形から明らかなように，宇宙の曲率 K は共動座標において時間的に一定であり，宇宙膨張によって変化しない．共動座標の曲率半径は $\mathscr{R} = K^{-1/2}$ で定義される長さの次元を持つ量であり，これも時間的に一定である.

一方，スケール因子の時間変化が $a(t) \propto t^\alpha$ で与えられて $\alpha < 1$ のとき，式

(2.51) で与えられる共動座標のハッブル半径 $D_{\mathrm{H}} = 1/aH$ は $t^{1-\alpha}$ に比例する．このため，ハッブル半径に対する曲率半径の比 $\mathscr{R}/D_{\mathrm{H}} = aH/K^{1/2}$ は $t^{-(1-\alpha)}$ に比例し，宇宙初期に遡るほど大きくなる．すなわち，宇宙の初期ではハッブル半径に比べて曲率半径が非常に大きく，初期条件として因果関係を持つ領域内での曲率がほとんどゼロに微調整されていたことになる．標準ビッグバン理論ではこの微調整の理由を説明することができない．この問題は，宇宙の**平坦性問題** (flatness problem) と呼ばれる．

8.1.2 インフレーション理論の導入

上に述べた標準ビッグバン理論の問題点は，初期の宇宙が減速膨張をし続けているために生じている．この場合，時間とともに粒子ホライズンが大きくなり続けているので，宇宙初期に時間を遡るほどホライズンの大きさはいくらでも小さくなる．このことが問題点の主な原因である．上に述べた問題点を解決する 1 つの方法として，初期の宇宙で一時的に急激な加速膨張をする時期があったと仮定することが考えられる．そうすれば宇宙初期に因果関係を持っていた 2 点の距離が急激に引き離されることになり，加速膨張期が終了してから減速膨張に転じると，見かけ上ホライズンの外へ出ているかのように見える．また，上に述べたように，共動座標における宇宙の曲率は一定なので，宇宙が加速膨張をすると物理的な距離で測った曲率は急激に小さくなる．したがって，現在の宇宙の曲率が観測できないほど小さいとしても不思議ではない．

このように，宇宙初期に仮説的な加速膨張期を仮定することにより標準ビッグバン理論の不自然さを解消しようとする理論が，**インフレーション理論** (inflation theory) である．インフレーション理論には加速膨張を起こす機構においてさまざまなモデルが考えられている．このため，不定性を持たない 1 つの具体的な理論というわけではない．インフレーション理論とは，宇宙初期に加速膨張を起こすという共通の特徴を持つ，さまざまな理論の総称である．この加速膨張期は宇宙初期のごく短期間で終了し，その後は標準ビッグバン理論で記述される減速膨張期へ繋がるものと考える．この加速膨張期のことをインフレーション期という．以下では，インフレーション期が開始する時刻 t_{i} におけるスケール因子の値を $a_{\mathrm{i}} = a(t_{\mathrm{i}})$ とし，終わる時刻 t_{f} における値を $a_{\mathrm{f}} = a(t_{\mathrm{f}})$ とする．また，インフレーション期の任意時刻 t における膨張指数を

$$N(t) \equiv \ln\left(\frac{a_{\mathrm{f}}}{a(t)}\right) = \int_t^{t_f} H dt \tag{8.1}$$

で定義する．ここで $H = \dot{a}/a$ はハッブル・パラメータである．上の定義により，インフレーション期の時刻 t 以降，インフレーションの終了時までの間に，宇宙の相対的な大きさは $e^{N(t)}$ 倍に膨張する．この膨張指数 $N(t)$ は，ある時刻以降にインフレーション期がどれくらい持続したかを特徴づける量としてよく用いられる．また，インフレーション期全体を通した全膨張指数を $\mathscr{N} \equiv N(t_\mathrm{i})$ とおく．すなわち，$a_f/a_i = e^{\mathscr{N}}$ とする．

典型的なインフレーション理論の例として，空間に一時的な真空エネルギーが出現し，それが宇宙項の役割をして宇宙を加速膨張させる，というモデルがよく考えられる．宇宙項が優勢な場合のフリードマン方程式の解は，式 (2.79) に与えられている．この解では，時間に対して宇宙が指数関数的に膨張し，ハッブル・パラメータ H の値は一定となる．インフレーション理論のモデルによって，ハッブル・パラメータが完全に一定になるとは限らないが，それが近似的に一定であれば，近似的に指数関数的な加速膨張が実現される．

インフレーション期の開始時刻における，スケール因子とハッブル・パラメータの値をそれぞれ $a_\mathrm{i}, H_\mathrm{i}$ とする．このときの物理的なハッブル半径は $1/H_\mathrm{i}$ で与えられる．この半径に対応する距離は，宇宙膨張によって現在までに大きくなっている．現在時刻でのその距離は，対応する共動距離 $1/(a_\mathrm{i}H_\mathrm{i})$ で与えられる．インフレーションがホライズン問題を解決するためには，共動距離で見たとき，インフレーションが開始するときの粒子ホライズン半径が，現在のハッブル半径 $1/H_0$ を上回っていればよい．その条件は

$$a_\mathrm{i}H_\mathrm{i} \lesssim H_0 \tag{8.2}$$

である．インフレーション理論では，インフレーション期にハッブル・パラメータがほぼ一定になるので，$H_\mathrm{i} \simeq H_\mathrm{f}$ となる．このとき式 (8.2) の条件は，膨張指数 $\mathscr{N}$ に対する条件として

$$\mathscr{N} \gtrsim \ln\left(\frac{a_\mathrm{f}H_\mathrm{f}}{H_0}\right) \equiv \mathscr{N}_\mathrm{min} \tag{8.3}$$

と表される．右辺で定義した $\mathscr{N}_\mathrm{min}$ は，インフレーション理論がホライズン問題を解決するために必要な，最小の膨張指数の値である．

インフレーション期を終えた宇宙は，そのまま標準ビッグバン理論の放射優勢期になる．インフレーション理論のモデルによっては，加速膨張期から放射優勢期に移るまで多少時間がかかる場合もあるが，ここでは簡単のため，その遷移期間は十分短いものとする．そのときのスケール因子の値 a_f とハッブル・パラメータの値

H_f は式 (2.136), (2.138) により

$$a_\mathrm{f} = \left(\frac{g_{*S0}}{g_{*\mathrm{f}}}\right)^{1/3} \frac{T_0}{T_\mathrm{f}}, \qquad H_\mathrm{f} = \sqrt{\frac{4\pi^3 g_{*\mathrm{f}}}{45}} \frac{{T_\mathrm{f}}^2}{m_\mathrm{Pl}} \tag{8.4}$$

で与えられる．ただし，インフレーションが終了して放射優勢期が始まったときの宇宙の温度を T_f とし，また $g_{*\mathrm{f}} = g_*(T_\mathrm{f})$ はそのときの有効自由度の値である．また，簡単のため $g_*(T_\mathrm{f}) = g_{*S}(T_\mathrm{f})$ と仮定した．これにより，式 (8.3) の右辺で定義される膨張指数の最小値 $\mathscr{N}_\mathrm{min}$ は，

$$\begin{aligned} \mathscr{N}_\mathrm{min} &= \ln\left(\sqrt{\frac{4\pi^3}{45}} \frac{{g_{*S0}}^{1/3} T_0}{m_\mathrm{Pl} H_0} {g_{*\mathrm{f}}}^{1/6}\, T_\mathrm{f}\right) \\ &\simeq 60 - \ln\left(\frac{h}{0.7}\right) + \frac{1}{6}\ln\left(\frac{g_{*\mathrm{f}}}{100}\right) + \ln\left(\frac{T_\mathrm{f}}{10^{15}\,\mathrm{GeV}}\right) \end{aligned} \tag{8.5}$$

となる．たとえば，インフレーション終了時の宇宙の温度が，大統一理論のエネルギー・スケール $T_\mathrm{f} \sim 10^{15}$ GeV 程度であるとし，またそのときの有効自由度が素粒子標準モデルにおける素粒子の種類数と同程度 $g_{*\mathrm{f}} \sim 100$ とすると，インフレーションの膨張指数が $\mathscr{N} \gtrsim 60$ を満たすとき，ホライズン問題が解決される．

次に，インフレーションが平坦性問題を解決する条件を考える．現在の宇宙における曲率の絶対値は，非常に小さい値に制限されている．曲率パラメータに対する観測値は 95% の信頼度で $|\Omega_\mathrm{K0}| \lesssim 0.007$ である．式 (2.72) の定義により，曲率パラメータの時間依存性は $\Omega_\mathrm{K} \propto a^{-2}H^{-2}$ であるから，現在の曲率パラメータの値 Ω_K0 と，インフレーション開始時における曲率パラメータの値 $\Omega_\mathrm{K}(t_\mathrm{i})$ との関係は，

$$\Omega_\mathrm{K0} = \left(\frac{a_\mathrm{i} H_\mathrm{i}}{H_0}\right)^2 \Omega_\mathrm{K}(t_\mathrm{i}) \tag{8.6}$$

で与えられる．ここで，ホライズン問題を解決する条件の式 (8.2) が十分に満たされていれば，曲率に関しても初期値に極端な微調整を必要としないことがわかる．式 (8.1) の膨張指数を使うと $a_\mathrm{i} = e^{-\mathscr{N}} a_\mathrm{f}$ となり，さらにインフレーション中の性質により $H_\mathrm{i} \simeq H_\mathrm{f}$ となるので，

$$\frac{a_\mathrm{i} H_\mathrm{i}}{H_0} \simeq \frac{a_\mathrm{f} H_\mathrm{f}}{H_0} e^{-\mathscr{N}} = e^{\mathscr{N}_\mathrm{min} - \mathscr{N}} \tag{8.7}$$

が成り立つ．ただし，式 (8.3) で定義される最小膨張指数 $\mathscr{N}_\mathrm{min}$ を用いた．したがって，インフレーションの膨張指数 $\mathscr{N}$ が最小膨張指数 $\mathscr{N}_\mathrm{min}$ を上回れば，そのぶんだけ式 (8.6) の係数は指数関数的に小さくなる．つまり，インフレーション開始時に曲率半径がホライズン半径程度となって，$\Omega_\mathrm{K}(t_\mathrm{i}) \sim 1$ であったとしても，現在

の曲率パラメータの絶対値は $|\Omega_{K0}| \lesssim e^{2(\mathscr{N}_{\min}-\mathscr{N})}$ に抑えられる．たとえば，現在の観測的上限値である $|\Omega_{K0}| \lesssim 0.007$ を満たすためには $\mathscr{N} - \mathscr{N}_{\min} \gtrsim 2.5$ であればよい．

以上のように，インフレーション期が十分長く続くことで $\mathscr{N} > \mathscr{N}_{\min}$ を十分に満たせば，ホライズン問題と平坦性問題を同時に解決することができる．このことが，インフレーション理論を魅力的な理論にしている．だが，インフレーション期を物理的に実現させる機構については，さまざまなモデルが提案されていて定説がなく，理論的に確定していない．有力な説の 1 つに，インフラトンと呼ばれるスカラー場が一時的に真空エネルギーを持ち，それが宇宙項の役割をしてインフレーション期を生む，というものがある．このようなモデルでは，インフレーション中のスカラー場に量子ゆらぎが発生し，それが宇宙の構造形成の種になっている可能性がある．これが正しければ，宇宙に存在する非一様性と構造の起源をも，インフレーション理論が説明できることになる．どのようなスカラー場を考えるかによって，このようなモデルにもいろいろな種類がある．以下では簡単な例として，単一のスカラー場によってもたらされるインフレーション理論を考える．

8.1.3 スカラー場によるインフレーション

インフレーション期を説明するもっとも簡単なモデルは，単一のスカラー場による一時的な真空エネルギーで宇宙を加速膨張させるものである．インフレーション期の持続は $\mathscr{N} > \mathscr{N}_{\min}$ を十分に満たす必要があり，さらにインフレーション期を終了させることも必要である．これを実現するようなスカラー場を求めれば，それがインフレーションの機構となる．インフレーション期をもたらす場のことを，一般に**インフラトン場** (inflaton field) という．

もっとも簡単な場合として，実スカラー場 $\phi(x)$ がインフラトン場になる場合を考える．運動方程式が時間の 2 階微分までしか含まず，さらに作用積分がローレンツ不変性と一般座標変換不変性を満たすことを要請する．このとき，実スカラー場のラグランジアン密度としては，式 (3.125) を一般化した形

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \tag{8.8}$$

しか許されない．ここで $V(\phi)$ はスカラー場のポテンシャル項を表し，その関数形は任意である．宇宙に適切なインフレーション期をもたらすためには，このポテンシャルが適切な関数形をしている必要がある．このスカラー場のエネルギー運動量テンソルは，式 (3.300) により，

$$T^{\mu}{}_{\nu} = -2g^{\mu\lambda}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial g^{\lambda\nu}} + \delta^{\mu}_{\nu}\mathscr{L} = \partial^{\mu}\phi\partial_{\nu}\phi - \delta^{\mu}_{\nu}\left[\frac{1}{2}\partial^{\lambda}\phi\partial_{\lambda}\phi + V(\phi)\right] \tag{8.9}$$

と求められる．ただし $\partial^{\mu} = g^{\mu\nu}\partial_{\nu}$ である．さらにオイラー–ラグランジュ方程式 (3.9) によって場の運動方程式を求めると

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_{\mu}(\sqrt{-g}\,\partial^{\mu}\phi) - \frac{dV}{d\phi} = 0 \tag{8.10}$$

が得られる．左辺第 1 項は式 (1.128) のダランベルシアンに等しいので，上の式は共変微分を用いて簡潔に $\nabla^{\mu}\nabla_{\mu}\phi - dV/d\phi = 0$ と表すこともできる．

スカラー場は最初に大きな非一様性を持っているかもしれないが，いったんインフレーションが始まるとすぐに一様化される．そこでスカラー場にも宇宙原理を適用すれば，その値は大局的に見て空間依存性を持たない．宇宙時間 t を用いると，一様等方計量であるロバートソン–ウォーカー計量は式 (2.1) で与えられる．この計量により ∂^{μ} を求めて式 (8.10) へ代入し，スカラー場の空間微分をゼロとおくと，一様等方宇宙におけるスカラー場のエネルギー運動量テンソルが得られて，

$$T^{0}{}_{0} = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^{2} - V(\phi), \quad T^{i}{}_{0} = T^{0}{}_{i} = 0, \quad T^{i}{}_{j} = \delta^{i}{}_{j}\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^{2} - V(\phi)\right] \tag{8.11}$$

となる. ただしドットは宇宙時間 t に関する微分を表す．この結果と式 (2.53) を比較すれば，スカラー場のエネルギー密度 ρ_{ϕ} と圧力 p_{ϕ} が求まり，

$$\rho_{\phi} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^{2} + V(\phi), \quad p_{\phi} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^{2} - V(\phi) \tag{8.12}$$

が得られる．このスカラー場がエネルギー優勢成分であるとき，宇宙時間を用いた一様等方宇宙のアインシュタイン方程式 (2.55), (2.56) は

$$H^{2} = \frac{8\pi G}{3}\left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^{2} + V(\phi)\right] - \frac{K}{a^{2}} \tag{8.13}$$

$$\dot{H} = -4\pi G\dot{\phi}^{2} + \frac{K}{a^{2}} \tag{8.14}$$

で与えられる．ただし，十分初期の宇宙には宇宙定数 Λ が寄与しない．これらの 2 式から，

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{8\pi G}{3}\left[\dot{\phi} - V(\phi)\right] \tag{8.15}$$

が導かれる．また，場の運動方程式 (8.10) は一様等方時空において

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0 \tag{8.16}$$

となる．

ここでスカラー場の時間変化が十分ゆっくりとしていて $\dot{\phi}^2 \ll |V(\phi)|$ を満たすならば，式 (8.12) により $\rho_\phi \simeq -p_\phi \simeq V(\phi)$ となる．このとき，式 (2.69) の対応からわかるように，スカラー場のポテンシャル・エネルギーが宇宙定数の役割を果たすことになり，$\Lambda \leftrightarrow 8\pi GV(\phi)$ と対応する．ポテンシャル・エネルギーが正 $V(\phi) > 0$ であり，さらにそれが宇宙のエネルギー優勢成分となるとき，正の宇宙項優勢期と同様のド・ジッター宇宙が現れ，加速膨張をするインフレーション期が実現される．

上のようにして十分インフレーションを持続させた後，スカラー場が物質と相互作用することによって，そのエネルギーを物質のエネルギーに転換させることができれば，標準ビッグバン理論における初期状態としての高温かつ高密度の宇宙が現れる．スカラー場のポテンシャル・エネルギーが物質のエネルギーに転換する過程のことを，宇宙の**再加熱** (reheating) という．

インフラトン場の適切な候補は素粒子標準モデルに含まれていないと考えられるため，それは未知の理論に含まれる未知の場だと考えられている．このため理論的な自由度が大きく，実にさまざまなインフレーション理論のモデルが考案されて調べられてきた．スカラー場の値がゆっくり変化することでインフレーションを起こすさまざまなモデルを，総称して**スローロール・インフレーション** (slow-roll inflation) という．その中でも，インフレーションに関係するスカラー場が 1 つだけの単純なモデルを，総称して**単一場スローロール・インフレーション** (single-field slow-roll inflation) という．この他にもインフレーション理論には数限りない変種が考えられているが，ここではそれらすべてを述べることはしない．その中でも，単一場スローロール・インフレーションはもっとも単純，かつ典型的なインフレーションのモデルである．

8.1.4 スローロール・インフレーション

もっとも単純なモデルである単一場スローロール・インフレーションに限っても，スカラー場のポテンシャル $V(\phi)$ の形や，スカラー場と物質との相互作用項の形などにいろいろな可能性があり，非常に多くのモデルが考案されている．以下では，単一場スローロール・インフレーションのモデルに共通する性質を考える．

スカラー場の運動方程式 (8.16) は，速度に比例する摩擦を受けながら，1 次元運動をする質点の運動方程式と同等である．左辺第 2 項が摩擦項に対応し，摩擦力に対応する係数がハッブル・パラメータ H となる．つまり，宇宙の膨張はス

カラー場の値の変化を妨げようとする．このことにより，ポテンシャルの傾き $dV/d\phi$ が十分に小さければ，宇宙が急激に膨張し続ける間，スカラー場の値が十分にゆっくりと変化することができる．この場合，運動方程式 (8.16) の加速度項は摩擦項に比べて小さく，スカラー場のポテンシャル力と宇宙膨張による摩擦力がつりあうように運動をするので，近似的に

$$\dot{\phi} \simeq -\frac{1}{3H}\frac{dV}{d\phi} \tag{8.17}$$

となる．この近似が成り立つようなインフレーションを起こすためには，次の 2 つの条件

$$\dot{\phi}^2 \ll 2V(\phi), \qquad |\ddot{\phi}| \ll 3H|\dot{\phi}| \tag{8.18}$$

が満たされればよい．最初の条件は，スカラー場が宇宙項と同様の役割をして宇宙の加速膨張を起こすために必要である．2 番めの条件は，スカラー場の運動をゆっくりさせて十分なインフレーション期を確保するために必要である．スカラー場の値がゆっくり変化することを**スローロール** (slow-roll) という．また，上の 2 つの条件式は**スローロール条件** (slow-roll conditions) と呼ばれる．

インフレーションによってスケール因子が急激に大きくなると，式 (8.13), (8.14) の曲率項 K/a^2 は急激に小さくなる．こうしてインフレーション期のほとんどの時間で曲率項は重要でないので，以下では無視して考える．スローロール条件が成り立つとすると，式 (8.13) は近似的に

$$H^2 \simeq \frac{8\pi G}{3}V \tag{8.19}$$

となる．また曲率項を無視した式 (8.14) は

$$\dot{H} = -4\pi G\dot{\phi}^2 \tag{8.20}$$

で与えられる．これらの式と第 1 のスローロール条件，すなわち式 (8.18) の第 1 式より，

$$\frac{\dot{H}}{H^2} \simeq -\frac{3\dot{\phi}^2}{2V} \ll 1 \tag{8.21}$$

が成り立つ．この式は，スローロール条件が成り立つときハッブル・パラメータ H の時間変化が十分小さくなることを表している．

式 (8.1) の膨張指数を，式 (8.17), (8.19) を用いて変形すると，

$$N = \int_t^{t_f} H dt = \int_{\phi(t)}^{\phi_f} \frac{H}{\dot{\phi}} d\phi = -8\pi G \int_{\phi(t)}^{\phi_f} \frac{V(\phi)}{dV/d\phi} d\phi \tag{8.22}$$

となる．ただし ϕ_f はインフレーション終了時におけるスカラー場の値である．

スローロール条件のもとで式 (8.17) を時間微分し，式 (8.21) を用いると，

$$\ddot{\phi} \simeq -\frac{\dot{\phi}}{3H}\frac{d^2V}{d\phi^2} - \frac{\dot{\phi}^2}{2V}\frac{dV}{d\phi} \tag{8.23}$$

が得られる．式 (8.17), (8.23) をスローロール条件の式 (8.18) へ代入すると，ポテンシャルに対する条件として

$$\left(\frac{1}{V}\frac{dV}{d\phi}\right)^2 \ll 48\pi G, \qquad \left|\frac{1}{V}\frac{d^2V}{d\phi^2}\right| \ll 24\pi G \tag{8.24}$$

が得られる．これらの式は，ポテンシャル $V(\phi)$ の形がきわめて平坦でなければならないことを意味している．ここで，次の 2 つのパラメータ

$$\epsilon = \frac{1}{16\pi G}\left(\frac{1}{V}\frac{dV}{d\phi}\right)^2, \qquad \eta = \frac{1}{8\pi G}\frac{1}{V}\frac{d^2V}{d\phi^2} \tag{8.25}$$

を定義すると，これらはスローロール条件のもとで小さな数になる．このようなパラメータを**スローロール・パラメータ** (slow-roll parameters) という．スローロール条件が成り立つ場合に，関係式 (8.17), (8.20), (8.23) をスローロール・パラメータで表すと，

$$\dot{\phi}^2 \simeq \frac{2V}{3}\epsilon, \quad \dot{H} \simeq -H^2\epsilon, \quad \ddot{\phi} \simeq H\dot{\phi}(\epsilon - \eta) \tag{8.26}$$

となる．

2 つのスローロール・パラメータ ϵ, η には，どちらにもポテンシャルの微分が 2 回含まれるので，平坦なポテンシャルについて同じ程度に小さい量である．たとえば，$V(\phi) \sim A\phi^p + B$ で近似されるポテンシャルを考えると，$p \sim \mathscr{O}(1)$ であればスローロール条件の式 (8.24) は $\phi^{-2} \ll 24\pi G$ となる．このときスローロール・パラメータは $\epsilon \sim p^2/(16\pi G\phi^2)$, $\eta \sim p(p-1)/(8\pi G\phi^2)$ となるので，スローロール条件が成り立てば，確かにこの 2 つのパラメータは同じ程度に小さい．

スローロール・パラメータは場の値 ϕ を通じて時間に依存する．式 (8.25) の時間微分をとり，さらに式 (8.17), (8.20) を用いると

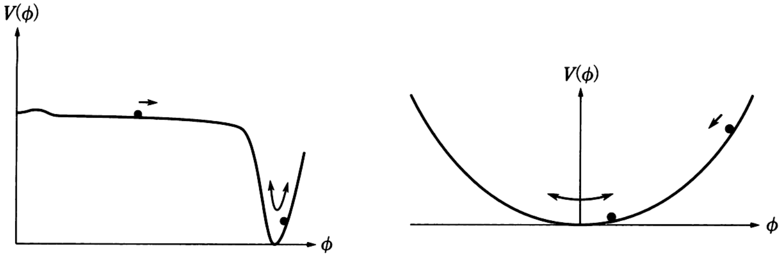


図 8.1 インフレーションを引き起こすスカラー場ポテンシャルの典型例．左図は，ポテンシャルが平坦な部分と急峻な谷を持つ場合．右図は，ポテンシャルが単純なべき関数で表される場合．

$$\dot{\epsilon} = 2H\epsilon(2\epsilon - \eta), \quad \dot{\eta} = H\left(2\epsilon\eta - \xi^2\right) \tag{8.27}$$

が得られる．ただし，

$$\xi^2 = \frac{1}{(8\pi G)^2 V^2}\frac{dV}{d\phi}\frac{d^3 V}{d\phi^3} \tag{8.28}$$

とした．この量 ξ もスローロール・パラメータの 1 つである．ポテンシャルの微分を 4 回含んでいるが，変数 ξ はその平方根であるため，平坦なポテンシャルに対して他のスローロール・パラメータと同じ程度に小さい量とみなすことができる．たとえば，上で考えた $V(\phi) \sim A\phi^p + B$ の場合は $\xi \sim p(p-1)^{1/2}(p-2)^{1/2}/(8\pi G\phi^2)$ となるので，確かに同じ程度に小さい量になっている．式 (8.27) からわかるように，スローロールの 1 次近似の範囲でスローロール・パラメータは一定であり，その時間変化はスローロールの 2 次の量である．

スローロール条件を満たすスカラー場ポテンシャルの典型例としては，図 8.1 のようなものがある．この図の左図に示した例の場合，ポテンシャルに少しだけ傾いた平坦な部分があり，その先に急峻な崖と谷がある．谷の底はポテンシャルの極小値となっている．平坦な部分ではスカラー場の値がゆっくりと転がるので，ここでインフレーションが起きる．そして，その先にある崖に落ちるとインフレーションが終了し，しばらくはポテンシャル極小値の谷のまわりを振動する．そして，物質場との相互作用により次第に振動エネルギーが物質へ転換されて，宇宙の再加熱が起きる．この型のモデルの場合，ポテンシャルに不自然な平坦部分を仮定しなければならないところは欠点と考えられている．

一方，図 8.1 の右図に示した例の場合，ポテンシャルは単純なべき関数で表される．以下に具体的に見るように，この場合でもスカラー場が十分大きな値をとる間

はゆっくりとしか変化できず，スローロール・インフレーションが実現される．値が小さくなって原点に近づくにつれて，スカラー場の変化が速くなり，原点で振動するようになる．その振動エネルギーが再加熱につながる．この型のインフレーション・モデルを**大きな場のインフレーション** (large-field inflation) という．このモデルは大局的に混沌とした時空像を導くので，**カオス的インフレーション** (chaotic inflation) とも呼ばれる．このモデルのポテンシャル形は単純でよいのだが，後に述べる密度ゆらぎの生成を考えると，パラメータに不自然な微調整問題が現れるという欠点もある．ただし，現実の宇宙に合うインフレーション・モデルを構成しようとすると，不自然なパラメータが現れることが一般的であり，これはインフレーション理論に共通する問題点でもある．以下では，インフレーション理論の典型的なモデルとして，大きな場のインフレーションを具体的に述べる．

8.1.5 インフレーションの典型例：大きな場のインフレーション

もっとも簡単なインフレーションのモデルとして，大きな場のインフレーションを取り上げる．このモデルでは，スカラー場ポテンシャルとして単純な形

$$V(\phi) = g\phi^p \tag{8.29}$$

を考える．ここで定数 p は 1 より大きな任意の実数 $p > 1$ とし，また定数 g はこのスカラー場の自己結合定数である．このポテンシャルは図 8.1 の右図のように，場の原点 $\phi = 0$ に極小値を持っている．このポテンシャル中で，インフラトン場が $\phi > 0$ においてスローロールをするものとする．

このモデルにおいて，スローロール条件の式 (8.24) は $\phi^{-2} \ll 48\pi G/p^2$ と $\phi^{-2} \ll 24\pi G/p(p-1)$ となる．すなわち

$$\phi \gg \frac{p}{\sqrt{48\pi}}\, m_{\rm Pl}, \qquad \phi \gg \frac{\sqrt{p(p-1)}}{\sqrt{24\pi}}\, m_{\rm Pl} \tag{8.30}$$

となる．ただし，$m_{\rm Pl} = G^{-1/2}$ はプランク質量である．どちらの条件も実質的に同じことを述べており，場の絶対値がプランク質量よりも十分に大きい間はスローロール条件が満たされ，スローロール・インフレーションが実現される．このことが，大きな場のインフレーションと呼ばれる由来である．逆に，場の値が原点に近づくとスローロール条件が破れて原点のまわりに振動するようになる．この時点でインフラトン場と他の場との間に適切な相互作用があれば，宇宙が再加熱してインフレーションは終了する．このモデルにおけるスローロール・パラメータは，式

(8.25), (8.28) により，

$$\epsilon = \frac{p^2}{16\pi G\phi^2}, \quad \eta = \frac{p(p-1)}{8\pi G\phi^2}, \quad \xi = \frac{p\sqrt{(p-1)(p-2)}}{8\pi G\phi^2} \tag{8.31}$$

と求められる．

このモデルでインフレーションを起こすためには，場の絶対値がプランク質量よりかなり大きな値を初期条件として持つ必要がある．このことは不自然に思えるかもしれない．もし，インフレーションの起きる前の宇宙が混沌とした量子的状態から始まるならば，スカラー場の値が場所によってさまざまな値をとっているはずである．この場合，スローロール条件を満たす場所と満たさない場所が空間的に混在する．スローロール条件を満たす場所では十分なインフレーションが起きるが，それを満たさない場所では起こらない．インフレーションを起こす場所の体積は急激に大きくなり，そのような場所が我々の観測できる宇宙の範囲を包み込んでいると考えられる．このシナリオでは，宇宙は全体として大きく非一様であり，インフレーションにより一様等方化された場所に我々が住んでいることになる．カオス的インフレーションの名前は，このモデルの持つ混沌とした宇宙の姿に由来する．

インフレーションが終了するとき，スローロール・パラメータ ϵ の値はもはや小さくない．このパラメータが 1 程度の値になるとき，インフレーションは終了している．このことと式 (8.31) により，インフレーション終了時のスカラー場の値を $\phi_{\rm f} = p(16\pi G)^{-1/2}$ と見積もることができる．すると，式 (8.22) に式 (8.29) を代入することにより，インフレーション期における膨張指数の値は，

$$N = \frac{4\pi G}{p}\phi^2 - \frac{p}{4} \tag{8.32}$$

となる．このことから，インフレーションに必要とされる $\mathcal{N} \gtrsim 60$ を満たす条件は，ほぼ

$$\phi_{\rm i} \gtrsim \sqrt{5p}\, m_{\rm Pl} \tag{8.33}$$

で与えられる．つまり，十分なインフレーションが起きる場所では，プランク質量よりも大きな場の値を初期条件として持つことが必要である．一方，初期条件における場のポテンシャル値 $V(\phi_{\rm i})$ がプランク・スケールを超えてしまうと，時空間の古典的描像が成り立たなくなってしまい，インフレーション期を考える意味が失われる．インフレーション中のポテンシャル値がプランク・スケールを超えないためには，結合定数 g が小さい値を持つ必要がある．ポテンシャルの次元は [質量]^4 で

あることから，その条件は $V(\phi_i) \lesssim m_{Pl}{}^4$ となる．式 (8.29) により，この条件は

$$\phi_i \lesssim \left(\frac{m_{Pl}{}^4}{g}\right)^{1/p} \tag{8.34}$$

と表される．この条件が式 (8.33) と両立するためには，結合定数が $g < (5p)^{-p/2} m_{Pl}{}^{4-p}$ を満たせばよい．たとえば，$p = 2, 4$ についてはおおまかに $g < 10^{-1} m_{Pl}{}^2$, $g < 10^{-3}$ などとなる．ただし，この後で述べる初期ゆらぎの生成を考えると，実際に観測されるゆらぎの大きさから，この結合定数の値が上で見積もられる上限値よりもずっと小さくなることが示される．結合定数の値の小ささはこのモデルの不自然な点である．他のインフレーション・モデルにおいても，観測と両立する適切なインフレーションを起こすためには，パラメータ微調整の必要性が一般的に現れる．

8.2 スカラー型ゆらぎの生成

宇宙にある構造のすべての起源は初期ゆらぎにある．これがどのように生成されたのかは，明らかに重要な問題である．インフレーション理論において初期ゆらぎを生成する機構の概略は，次のようなものである．まず，インフレーション中の場は，古典的には一様化されているとはいえ，量子ゆらぎの効果によって非一様な成分を持っている．通常の量子ゆらぎは観測されない限り現実の古典的なゆらぎとなることはない．ところが，インフレーションによってゆらぎの波長がホライズンのサイズを超えると，量子的な干渉がなくなるので，その後は古典的なゆらぎとして扱えると期待できる．この期待が正しければ，インフレーション中に生成されるゆらぎはいわゆるスケール不変な性質を持ち，観測されている宇宙の大規模構造を説明できる可能性がある．

以下ではスローロール・インフレーションに基づき，インフレーション理論における初期ゆらぎの生成を定量的に導く方法を述べる．宇宙マイクロ波背景放射の非等方性や，銀河の空間分布などから求められる宇宙の大規模構造など，宇宙の非一様性の観測は近年大きく進み，初期ゆらぎの性質は宇宙論に対する重要な情報源となっている．インフレーション理論の予言する初期ゆらぎの性質が，観測を説明し得るかどうかを調べることは，インフレーション理論自体の検証につながるためにとても重要である．

8.2.1 スカラー場のゆらぎ

以下では，時間変数として式 (2.10) で与えられる共形時間 τ を用いることにする．インフラトン場として実スカラー場 $\phi(\boldsymbol{x},\tau)$ を考え，これを背景成分 $\bar{\phi}(\tau)$ と摂動成分 $\delta\phi(\boldsymbol{x},\tau)$ に分解して

$$\phi(\boldsymbol{x},\tau) = \bar{\phi}(\tau) + \delta\phi(\boldsymbol{x},\tau) \tag{8.35}$$

とする．この分解において，式 (8.9) のエネルギー運動量テンソルを求める．まず背景成分については

$$\bar{T}^0{}_0 = -\frac{\bar{\phi}'^2}{2a^2} - V(\phi), \quad \bar{T}^i{}_0 = \bar{T}^0{}_i = 0, \quad \bar{T}^i{}_j = \delta^i{}_j\left[\frac{\bar{\phi}'^2}{2a^2} - V(\phi)\right] \tag{8.36}$$

となるので，エネルギー密度と圧力の背景成分は

$$\bar{\rho}_\phi = \frac{\bar{\phi}'^2}{2a^2} + V(\bar{\phi}), \quad \bar{p}_\phi = \frac{\bar{\phi}'^2}{2a^2} - V(\bar{\phi}) \tag{8.37}$$

と表される．これらの式 (8.36), (8.37) は，宇宙時間 t により表された式 (8.11), (8.12) を，共形時間 τ により表し直したものに対応する．

次に，スカラー場の摂動成分 $\delta\phi$ および式 (7.6) の計量摂動成分 A, B_i, C_{ij} について線形近似を適用すると，スカラー場のエネルギー運動量テンソルの式 (8.9) の線形摂動成分として

$$\delta T^0{}_0 = -\frac{\bar{\phi}'}{a^2}\left(\delta\phi' - \bar{\phi}' A\right) - \frac{dV}{d\phi}\delta\phi \tag{8.38}$$

$$\delta T^0{}_i = -\frac{\bar{\phi}'}{a^2}\delta\phi_{,i} \tag{8.39}$$

$$\delta T^i{}_0 = \frac{\bar{\phi}'}{a^2}\left(\delta\phi^{,i} - \bar{\phi}' B^i\right) \tag{8.40}$$

$$\delta T^i{}_j = \delta^i{}_j\left[\frac{\bar{\phi}'}{a^2}\left(\delta\phi' - \bar{\phi}' A\right) - \frac{dV}{d\phi}\delta\phi\right] \tag{8.41}$$

が得られる．これを式 (7.50)-(7.53) と比べることにより，エネルギー密度のゆらぎ $\delta\rho = \bar{\rho}\delta$，圧力ゆらぎ δp，速度 v_i および非等方ストレス $\Pi^i{}_j$ は

$$\delta\rho_\phi = \frac{\bar{\phi}'}{a^2}\left(\delta\phi' - \bar{\phi}'A\right) + \frac{dV}{d\phi}\delta\phi \tag{8.42}$$

$$v_{\phi i} = -\frac{\delta\phi_{,i}}{\bar{\phi}'} + B_i \tag{8.43}$$

$$\delta p_\phi = \frac{\bar{\phi}'}{a^2}\left(\delta\phi' - \bar{\phi}'A\right) - \frac{dV}{d\phi}\delta\phi \tag{8.44}$$

$$\Pi_\phi{}^i{}_j = 0 \tag{8.45}$$

と対応することがわかる.

ここでスカラー型成分に対する共動ゲージ $v^{(S)} = B^{(S)}$ をとると，式 (8.43) により，スカラー場の摂動成分 $\delta\phi$ が消えてしまう．すなわち，この特別なゲージではスカラー場のゆらぎがうまく取り扱えない．最初からゲージ固定をする方法では，問題によって不適切なことが起こる例である.

以下ではゲージ固定をせずに，スカラー場のゆらぎからゲージ不変量を定義することを考える．スカラー場はその定義により座標変換 $x^\mu \to \tilde{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu$ について不変であり，$\tilde{\phi}(\tilde{x}) = \phi(x)$ と変換する．このことから，線形近似で座標点が同じ場所のゲージ変換を求めると，

$$\tilde{\phi}(x) = \phi(x) - \phi_{,\mu}\xi^\mu \tag{8.46}$$

となる．ここに式 (8.35) を代入することにより，スカラー場ゆらぎのゲージ変換は

$$\widetilde{\delta\phi} = \delta\phi - \bar{\phi}'T \tag{8.47}$$

で与えられる．ただし，$(\xi^\mu) = (T, L^i)$ とし，背景スカラー場 $\bar{\phi}$ が空間依存しないこと，および背景場はゲージ変換においてその関数形を変えないことを用いた．計量に対するスカラー成分のゲージ変換は式 (7.113)–(7.116) であるから，このとき，

$$\delta\phi^{(\mathrm{GI})} \equiv \delta\phi - \bar{\phi}'\left(B^{(\mathrm{S})} + E^{(\mathrm{S})\prime}\right) \tag{8.48}$$

という組み合わせがゲージ不変量となる．このゲージ不変量 $\delta\phi^{(\mathrm{GI})}$ は，共形ニュートン・ゲージ $B^{(\mathrm{S})} = E^{(\mathrm{S})} = 0$ におけるスカラー場ゆらぎに対応することが明らかである.

共形時間を用いてスカラー場の運動方程式 (8.10) を書き下すと，背景成分は

$$\bar{\phi}'' + 2\mathscr{H}\bar{\phi}' + a^2\frac{dV}{d\phi} = 0 \tag{8.49}$$

となり，摂動成分は

$$\delta\phi'' + 2\mathscr{H}\,\delta\phi' - \left(\Delta - a^2\frac{d^2V}{d\phi^2}\right)\delta\phi - \bar{\phi}'\left(A' - B^i{}_{|i} - C^i{}_i{}'\right) + 2a^2\frac{dV}{d\phi}A = 0 \tag{8.50}$$

となる．ここで $\Delta = \nabla^\mu\nabla_\mu$ はラプラシアンであり，またポテンシャルの微分 $dV/d\phi$, $d^2V/d\phi^2$ は背景場 $\bar{\phi}$ で評価した値である．ここに得られた摂動成分の運動方程式を，式 (7.148), (7.149) および式 (8.48) で定義されるゲージ不変量によって書き直すと，当然ながらゲージ依存する項が消えて，ゲージ不変な運動方程式

$$\delta\phi^{(\mathrm{GI})\prime\prime} + 2\mathscr{H}\,\delta\phi^{(\mathrm{GI})\prime} - \left(\Delta - a^2\frac{d^2V}{d\phi^2}\right)\delta\phi^{(\mathrm{GI})} + \bar{\phi}'(3\Psi' - \Phi') + 2a^2\frac{dV}{d\phi}\Phi = 0 \tag{8.51}$$

が得られる．ただしこの式の導出には背景成分の運動方程式 (8.49) も用いた．

また，式 (7.150)-(7.152) のゲージ不変量は，式 (8.42)-(8.45) により

$$\delta\rho_\phi^{(\mathrm{GI})} = \frac{\bar{\phi}'}{a^2}\left(\delta\phi^{(\mathrm{GI})\prime} - \bar{\phi}'\Phi\right) + \frac{dV}{d\phi}\delta\phi^{(\mathrm{GI})} \tag{8.52}$$

$$v_\phi^{(\mathrm{GI})} = -\frac{\delta\phi^{(\mathrm{GI})}}{\bar{\phi}'} \tag{8.53}$$

$$\delta p_\phi^{(\mathrm{GI})} = \frac{\bar{\phi}'}{a^2}\left(\delta\phi^{(\mathrm{GI})\prime} - \bar{\phi}'\Phi\right) - \frac{dV}{d\phi}\delta\phi^{(\mathrm{GI})} \tag{8.54}$$

と表される．ただし，スカラー場のエネルギー密度ゆらぎを $\delta\rho_\phi^{(\mathrm{GI})} = \bar{\rho}_\phi\,\delta_\phi^{(\mathrm{GI})}$ とした．

式 (8.45) で導かれたように，スカラー場の非等方応力はゼロである．したがって，式 (7.157) により計量のゲージ不変量について

$$\Phi + \Psi = 0 \tag{8.55}$$

が成り立つ．したがって運動方程式 (8.51) は

$$\delta\phi^{(\mathrm{GI})\prime\prime} + 2\mathscr{H}\delta\phi^{(\mathrm{GI})\prime} - \left(\Delta - a^2\frac{d^2V}{d\phi^2}\right)\delta\phi^{(\mathrm{GI})} - 4\bar{\phi}'\Phi' + 2a^2\frac{dV}{d\phi}\Phi = 0 \tag{8.56}$$

と書き直すことができる．前節でも述べたように，インフレーションが開始すると，すぐに曲率がゼロになってしまうので，以下では $K = 0$ とする．この場合，背景時空の式 (7.68) に式 (8.37) を代入すると，

$$\mathscr{H}' = \mathscr{H}^2 - 4\pi G\bar{\phi}'^2 \tag{8.57}$$

が得られる．式 (8.37), (8.52)-(8.55), (8.57) を用いると，ゲージ不変な線形アインシュタイン方程式のスカラー型成分 (7.154)-(7.156) は

$$\Delta\Phi - 3\mathscr{H}\Phi' - \left(\mathscr{H}' + 2\mathscr{H}^2\right)\Phi = 4\pi G\left[\bar{\phi}'\delta\phi^{(\mathrm{GI})\prime} + a^2\frac{dV}{d\phi}\delta\phi^{(\mathrm{GI})}\right] \tag{8.58}$$

$$\Phi' + \mathscr{H}\Phi = 4\pi G\,\bar{\phi}'\delta\phi^{(\mathrm{GI})} \tag{8.59}$$

$$\Phi'' + 3\mathscr{H}\Phi' + \left(\mathscr{H}' + 2\mathscr{H}^2\right)\Phi = 4\pi G\left[\bar{\phi}'\delta\phi^{(\mathrm{GI})\prime} - a^2\frac{dV}{d\phi}\delta\phi^{(\mathrm{GI})}\right] \tag{8.60}$$

となる．

ここで，式 (8.58) と式 (8.60) を加えることにより，

$$\Phi'' + \Delta\Phi = 8\pi G\bar{\phi}'\delta\phi^{(\mathrm{GI})\prime} \tag{8.61}$$

が得られる．この式と式 (8.59) から $\delta\phi^{(\mathrm{GI})}$ を消去すれば，ゲージ不変ポテンシャル Φ に対する方程式

$$\Phi'' + 2\left(\mathscr{H} - \frac{\bar{\phi}''}{\bar{\phi}'}\right)\Phi' - \Delta\Phi + 2\left(\mathscr{H}' - \mathscr{H}\frac{\bar{\phi}''}{\bar{\phi}'}\right)\Phi = 0 \tag{8.62}$$

を得る．この式は，スカラー場に対するバーディーン方程式 (7.174) に等価である．実際，背景成分の方程式 (8.37), (8.49) を用いると，スカラー場の音速に対応する量は

$$c_\phi^2 = \frac{\bar{p}_\phi'}{\bar{\rho}_\phi'} = 1 + \frac{2}{3}\frac{a^2}{\mathscr{H}\bar{\phi}'}\frac{dV}{d\phi} = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\frac{\bar{\phi}''}{\mathscr{H}\bar{\phi}'} \tag{8.63}$$

と計算されるので，バーディーン方程式 (7.174) はいまの場合，

$$\Phi'' + 2\left(\mathscr{H} - \frac{\bar{\phi}''}{\bar{\phi}'}\right)\Phi' + \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2\bar{\phi}''}{\mathscr{H}\bar{\phi}'}\right)\Delta\Phi + 2\left(\mathscr{H}' - \mathscr{H}\frac{\bar{\phi}''}{\bar{\phi}'}\right)\Phi = 4\pi Ga^2\bar{p}_\phi\Gamma_\phi \tag{8.64}$$

となることがわかる．また，エントロピーゆらぎの式 (7.153) へ式 (8.52), (8.53), (8.63) を代入し，さらに式 (8.58)-(8.60) を用いて計算すると，スカラー場のエントロピーゆらぎ Γ_ϕ は

$$\bar{p}_\phi\Gamma_\phi = -\frac{1}{6\pi G\mathscr{H}\bar{\phi}'}\frac{dV}{d\phi}\Delta\Phi = \frac{1}{6\pi Ga^2}\left(2 + \frac{\bar{\phi}''}{\mathscr{H}\bar{\phi}'}\right)\Delta\Phi \tag{8.65}$$

で与えられる．式 (8.65) を式 (8.64) の右辺へ代入すれば，式 (8.62) が得られる．

スカラー場の摂動量から作られるゲージ不変量としては，式 (8.48) で定義され

る $\phi^{(\mathrm{GI})}$ の他に，

$$u = a\left(\delta\phi - \frac{\bar{\phi}'}{\mathscr{H}}D\right) \tag{8.66}$$

という組み合わせも考えられる．このゲージ不変量は $D = 0$ となるようなゲージから見たスカラー場の摂動成分に比例する．そのようなゲージはたとえば式 (7.212) で定義される空間的平坦ゲージである．このゲージ不変量 u を**ムハノフ-佐々木変数** (Mukhanov-Sasaki variable) という．ゲージ不変量 $\delta\phi^{(\mathrm{GI})}$ との関係は

$$u = a\left(\delta\phi^{(\mathrm{GI})} - \frac{\bar{\phi}'}{\mathscr{H}}\Psi\right) \tag{8.67}$$

である．さらに，式 (7.223) 第 2 式で表される曲率ゆらぎ ζ から式 (8.53) のゲージ不変速度 $V = v^{(\mathrm{GI})}$ を消去すると，上式は

$$u = -\frac{a\bar{\phi}'}{\mathscr{H}}\zeta \tag{8.68}$$

と表すことができる．すなわち，ムハノフ-佐々木変数は曲率ゆらぎに比例する量である．

スカラー場の発展方程式 (8.56) とバーディーン方程式 (8.62) を用いると，ムハノフ-佐々木変数 u は

$$u'' - \Delta u - \frac{z''}{z}u = 0 \tag{8.69}$$

という簡単な運動方程式を満たすことがわかる．ただし，

$$z = \frac{a\bar{\phi}'}{\mathscr{H}} \tag{8.70}$$

とおいた．この変数 z は時間のみに依存する背景場の関数である．

一般に，運動方程式は変分原理によって作用積分から導かれる．いまスカラー場と重力場の共存系を考えているので，その作用積分は (8.8), (3.301) により

$$S = \int \sqrt{-g}\,d^4x\left[\frac{R}{16\pi G} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi)\right] \tag{8.71}$$

で与えられる．ただし，いま考えているのは初期宇宙なので宇宙項は無視した．ここから摂動量に対する線形近似の運動方程式 (8.69) を得るには，作用積分を 2 次の摂動量まで展開したものを用いればよい．そこに背景場の方程式を代入し，さらにゲージ変換に関する拘束条件を求めて代入してから表面項を落とすという手続き

を踏めば，ムハノフ-佐々木変数に対する作用積分が得られる．ただし，これを実際に行うとかなり長い計算になる．ここではそれを避けて，運動方程式 (8.69) を導くべき作用積分の形がどうあるべきかを考える．この運動方程式をスカラー場の運動方程式 (3.126) と比較すると，質量項のところを $m^2 = -z''/z$ と置き換えたものになっていることがわかる．すなわち，質量に対応する量が時間変化するようなスカラー場の系と同等である．スカラー場のラグランジアン密度が式 (3.125) で与えられることから，ムハノフ-佐々木変数の作用積分は

$$S = \frac{1}{2}\int d\tau d^3x\left(u'^2 - u_{,i}u_{,i} + \frac{z''}{z}u^2\right) \tag{8.72}$$

である．ここで，運動方程式を導くという条件だけからは作用積分の全体にかかる係数が決まらないが，式 (8.71) において $\delta\phi$ の 2 次の項にかかる係数が一致する条件で決定することができる．基本的な作用積分の式 (8.71) から，上述の長い手続きによって上式を導くこともできる*1.

8.2.2 スカラー場の量子ゆらぎ

上の考察における古典的なスカラー場を量子化することにより，量子ゆらぎを求めることができる．質量項の振る舞いを別にすれば，上に得られた作用積分の式 (8.72) は本質的に平坦時空のスカラー場と変わりないので，第 4 章で述べた手法を用いて量子化できる．ただし，ここで考える系は時間並進について不変でないため，多少の拡張が必要である．

共形時間 τ を時間変数にとって，ムハノフ-佐々木変数 u の共役運動量を求めれば,

$$\pi(\boldsymbol{x},\tau) = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u'} = u'(\boldsymbol{x},\tau) \tag{8.73}$$

となる．ここで量子化規則は

$$[u(\boldsymbol{x},\tau), u(\boldsymbol{y},\tau)] = [\pi(\boldsymbol{x},\tau), \pi(\boldsymbol{y},\tau)] = 0 \tag{8.74}$$

$$[u(\boldsymbol{x},\tau), \pi(\boldsymbol{y},\tau)] = i\delta_{\mathrm{D}}^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{8.75}$$

である．場の演算子を平面波展開すると

$$u(\boldsymbol{x},\tau) = \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left[u_k(\tau)a(\boldsymbol{k})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + u_k{}^*(\tau)a^\dagger(\boldsymbol{k})e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right] \tag{8.76}$$

---

*1 V. F. Mukhanov, H. A. Feldman, and R. H. Brandenberger, *Physics Report*, **215**, 203–335 (1992).

となる．いま考えている系には時間並進対称性がないため，基本モードは $e^{\pm i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$ の形にまとまらず，時間依存成分が一般のモード関数 $u_k(\tau)$ となる．ただし $k = |\boldsymbol{k}|$ である．ミンコフスキー時空におけるスカラー場の展開式 (4.9) では，エネルギーに対応する k^0 を用いてローレンツ不変な積分要素を用いたが，いまは時間並進対称性がないので，空間回転の不変性だけを持つ積分要素 $d^3k/(2\pi)^3$ を用いる．運動方程式の解の完全系から基本モードが構成されるのであったから，モード関数 $u_k(\tau)$ は微分方程式

$$u_k'' + \left(k^2 - \frac{z''}{z}\right)u_k = 0 \tag{8.77}$$

の解である．関数 u_k がこの方程式の解であれば，その複素共役 $u_k{}^*$ も必ず解である．

微分方程式 (8.77) には 1 階微分の項がないので，その解 $u_k, u_k{}^*$ のロンスキアンは時間的に一定である．そこで

$$u_k\frac{\partial u_k{}^*}{\partial\tau} - \frac{\partial u_k}{\partial\tau}u_k{}^* = i \tag{8.78}$$

によってモード関数を規格化する．式 (3.141) にならい，時刻一定面における場のスカラー積を

$$(\phi_1, \phi_2) = -i\int d^3x\left[\phi_1(\boldsymbol{x},\tau)\frac{\partial\phi_2{}^*(\boldsymbol{x},\tau)}{\partial\tau} - \frac{\partial\phi_1(\boldsymbol{x},\tau)}{\partial\tau}\phi_2{}^*(\boldsymbol{x},\tau)\right] \tag{8.79}$$

で定義する．このスカラー積を用いると，平坦時空における式 (3.142)–(3.144) に対応して，モード関数の規格直交関係は

$$\left(u_k e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}, u_{k'} e^{i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}}\right) = (2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') \tag{8.80}$$

$$\left(u_k{}^* e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}, u_{k'}{}^* e^{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}}\right) = -(2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') \tag{8.81}$$

$$\left(u_k e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}, u_{k'}{}^* e^{-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}}\right) = 0 \tag{8.82}$$

となる．この関係を用いると，式 (8.76) の展開係数である生成消滅演算子は

$$a(\boldsymbol{k}) = \left(u, u_k e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right) = -i\int d^3x\left[\frac{\partial u_k{}^*}{\partial\tau}u(\boldsymbol{x},\tau) - u_k{}^*\pi(\boldsymbol{x},\tau)\right]e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{8.83}$$

$$a^\dagger(\boldsymbol{k}) = -\left(u, u_k{}^* e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\right) = i\int d^3x\left[\frac{\partial u_k}{\partial\tau}u(\boldsymbol{x},\tau) - u_k\pi(\boldsymbol{x},\tau)\right]e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{8.84}$$

で与えられる．ここで右辺の積分は時刻によらない．これらの式から交換関係を求めると，

$$\left[a(\boldsymbol{k}), a^\dagger(\boldsymbol{k}')\right] = (2\pi)^3\delta^3(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}') \tag{8.85}$$

$$[a(\boldsymbol{k}), a(\boldsymbol{k}')] = \left[a^\dagger(\boldsymbol{k}), a^\dagger(\boldsymbol{k}')\right] = 0 \tag{8.86}$$

が得られる．あとは通常の場の量子化の手順のようにして，真空状態 $|0\rangle$ を $a(\boldsymbol{k})|0\rangle = 0$ により定義し，これに生成演算子を作用させることでフォック空間が構成できる．

インフレーション理論においては，インフレーション前に古典的なゆらぎが存在したとしても，それは空間の急激な膨張によりならされて消えてしまう．このため，現在の宇宙に引き継がれるゆらぎはインフレーション中における真空の量子ゆらぎだけであると考えられる．式 (8.76) において，場 u の空間依存性をフーリエ変換すると

$$\tilde{u}(\boldsymbol{k}, \tau) = \int d^3x\, e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} u(\boldsymbol{x}, \tau) = u_k(\tau)a(\boldsymbol{k}) + u_k{}^*(\tau)a^\dagger(-\boldsymbol{k}) \tag{8.87}$$

が得られる．フーリエ係数の積の真空期待値から，ゆらぎのパワースペクトル $P_u(k, \tau)$ を

$$\left\langle 0 \left| \tilde{u}(\boldsymbol{k}, \tau)\tilde{u}(\boldsymbol{k}', \tau) \right| 0 \right\rangle = (2\pi)^3\delta_{\mathrm{D}}^3(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}')P_u(k, \tau) \tag{8.88}$$

で定義する．空間の並進不変性と回転不変性により，左辺のような平均量には波数ベクトルに関して必ず右辺のようにデルタ関数が現れ，それ以外の部分は $k = |\boldsymbol{k}|$ だけの関数になる．その理由は後の 10.4.1 項で説明する．パワースペクトルは，波数 k に対応するゆらぎの大きさを特徴づける関数である．交換関係 (8.85), (8.86) を用いてこのパワースペクトルを計算すれば，

$$P_u(k, \tau) = |u_k(\tau)|^2 \tag{8.89}$$

という結果が得られる．すなわち，モード関数 u_k の形が量子ゆらぎの振幅の形を決める．

スケールが小さい短波長極限では，モード関数が通常の静止平坦空間における場の理論のものに一致すると考えられる．事実，方程式 (8.77) で $k/\mathscr{H} \to \infty$ の極限をとれば

$$u_k'' + k^2u_k = 0 \tag{8.90}$$

となるから，短波長極限で漸近的に

$$u_k(\tau) = \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}} \qquad (k/\mathscr{H} \to \infty) \tag{8.91}$$

となる解が規格化条件 (8.78) を満たす．

一方，スケールの大きい長波長極限 $k/\mathscr{H} \to 0$ において方程式 (8.77) は

$$u_k'' - \frac{z''}{z} u_k = 0 \tag{8.92}$$

となる．この方程式の独立解を求めると，

$$z(\tau), \qquad z(\tau) \int^\tau \frac{d\tau'}{z^2(\tau')} \tag{8.93}$$

が得られる．ここでインフレーション中にスローロール条件が成り立つ場合を考え，そのときの関数 $z(\tau) = a\bar{\phi}'/\mathscr{H}$ の振る舞いを調べてみる．式 (8.17), (8.19), (8.25) により $|\bar{\phi}'/\mathscr{H}| = |\dot{\bar{\phi}}/H| \simeq \sqrt{\epsilon/4\pi G}$ が成り立つが，式 (8.27) により，スローロール・パラメータ ϵ の時間変化は小さいから，$z(\tau)$ の時間依存性はほぼスケール因子 a に比例する．また，インフレーション中は共形時間 τ が漸近的に一定値に近づくような振る舞いをする．その一定値を式 (8.93) の第 2 の解における積分の下限に選ぶと，式 (8.93) において成長する解は最初の解 $u_k(\tau) \propto z(\tau)$ となり，2 つめの解は減衰する．成長解のみを取り出すと，長波長極限で漸近的に

$$u_k(\tau) = C(k) z(\tau) \qquad (k/\mathscr{H} \to 0) \tag{8.94}$$

という形になる．ただし，波数に依存する係数 $C(k)$ は初期条件から決まる関数である．ここで上の解はロンスキアンによる規格化の式 (8.78) を満たさないが，これは減衰解を落としてあるためであり，成長解だけを考える限りは問題ない．

曲率ゆらぎ ζ とムハノフ-佐々木変数 u は，式 (8.68), (8.70) により，$u = -z\zeta$ という関係で結びついているので，長波長極限における曲率ゆらぎのパワースペクトルは $P_\zeta(k,\tau) = P_u(k,\tau)/z^2$ で与えられる．したがって

$$P_\zeta(k,\tau) = |C(k)|^2 \qquad (k/\mathscr{H} \to 0) \tag{8.95}$$

が得られ，これは時間 τ に依存しない波数だけの関数になる．このように，長波長極限でスペクトルが時間変化しない曲率ゆらぎは，便利な量である．その具体的なスペクトル形は，関数 $C(k)$ を求めることにより与えられる．

8.2.3 スローロール近似におけるモード関数

以下では，スローロール近似が成り立つ場合に，モード関数の満たす微分方程

式 (8.77) の解を求める．そのために，この微分方程式の係数となる z''/z をスローロール近似で求めておく．

宇宙時間と共形時間の微分は $ad/dt = d/d\tau$ の関係にあるから，スローロール近似の運動方程式 (8.17) は

$$\bar{\phi}' \simeq -\frac{a^2}{3\mathscr{H}}\frac{dV}{d\phi} \tag{8.96}$$

と表され，スローロール条件の式 (8.18) は

$$\bar{\phi}'^2 \ll 2a^2 V(\phi), \quad \left|\bar{\phi}'' - \mathscr{H}\bar{\phi}'\right| \ll 3\mathscr{H}\left|\bar{\phi}'\right| \tag{8.97}$$

と表される．また，式 (8.19) は

$$\mathscr{H}^2 \simeq \frac{8\pi G a^2}{3} V \tag{8.98}$$

で与えられ，さらに式 (8.26) はスローロール・パラメータの 1 次近似で

$$\bar{\phi}'^2 \simeq \frac{2a^2 V}{3}\epsilon, \quad \mathscr{H}' \simeq \mathscr{H}^2(1-\epsilon), \quad \bar{\phi}'' \simeq \mathscr{H}\bar{\phi}'(1+\epsilon-\eta) \tag{8.99}$$

となる．スローロール・パラメータの微分の式 (8.27) からは

$$\epsilon' \simeq 2\mathscr{H}\epsilon(2\epsilon-\eta), \quad \eta' \simeq \mathscr{H}\left(2\epsilon\eta - \xi^2\right) \tag{8.100}$$

が得られる．これらの関係式を用いて $z = a\bar{\phi}'/\mathscr{H}$ を微分すると，スローロール・パラメータの 1 次近似で，

$$z' \simeq \mathscr{H}(1+2\epsilon-\eta)z, \quad z'' \simeq \mathscr{H}^2(2+5\epsilon-3\eta)z \tag{8.101}$$

となる．ここで 2 番めの式を導くとき，スローロール・パラメータ ϵ, η の微分は 2 次の量であることから落としてある．

ここで式 (8.99) の第 2 式は，1 次近似でスローロール・パラメータ ϵ が一定であることから積分することができる．積分の基準点 $\tau = 0$ を，仮にインフレーションが永遠に続くと考えた場合の無限の未来にとれば，積分定数が現れずに関係式

$$(1-\epsilon)\tau \simeq -\frac{1}{\mathscr{H}} \tag{8.102}$$

が得られる．ここでつねに $\tau < 0$ である．この式と式 (8.101) の第 2 式により

$$\frac{z''}{z} \simeq \frac{2+5\epsilon-3\eta}{(1-\epsilon)^2\tau^2} \simeq \frac{2+9\epsilon-3\eta}{\tau^2} \tag{8.103}$$

となる．ここで，変数 ν を

$$\frac{z''}{z} = \frac{\nu^2 - 1/4}{\tau^2} \tag{8.104}$$

により定義すると，スローロール・パラメータの 1 次近似で

$$\nu \simeq \frac{3}{2} + 3\epsilon - \eta \tag{8.105}$$

となる．変数 ν は 1 次近似で時間的に一定である．

上に導入した変数 ν を用いると，モード関数の微分方程式 (8.77) は

$$\frac{d^2 u_k}{d\tau^2} + \left[k^2 - \left(\nu^2 - \frac{1}{4}\right)\frac{1}{\tau^2}\right] u_k = 0 \tag{8.106}$$

と表される．ここで $u_k = \sqrt{-\tau} F_k$ と変数変換すると，変数 ν が定数のとき，上の方程式はベッセル微分方程式 (B.28) に等価であることがわかる．スローロールの 1 次近似では確かに変数 ν は時間に依存しない．したがって，ベッセル微分方程式の一般解であるハンケル関数の重ね合わせとして，式 (8.106) の一般解は

$$u_k(\tau) = \sqrt{\frac{\pi}{4k}} \sqrt{-k\tau} \left[\alpha_k H_\nu^{(1)}(-k\tau) + \beta_k H_\nu^{(2)}(-k\tau)\right] \tag{8.107}$$

で与えられる．ただし $H_\nu^{(1)}$ および $H_\nu^{(2)}$ はそれぞれ式 (B.27) で定義される第 1 種および第 2 種ハンケル関数である．いま時間の基準点を無限の未来にとっているので，つねに $\tau < 0$ となることに注意する．また α_k, β_k は積分定数である．ハンケル関数の性質 $H_\nu^{(1)}(z) H_\nu^{(2)\prime}(z) - H_\nu^{(1)\prime}(z) H_\nu^{(2)}(z) = -4i/\pi z$，および実数引数に対して $H_\nu^{(1)*}(x) = H_\nu^{(2)}(x)$ となることを用いると，規格化条件 (8.78) を満たすためには

$$|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2 = 1 \tag{8.108}$$

となればよいことがわかる．

ここで，積分定数を決定しない限り，モード関数に不定性があることに注意する．モード関数を決定しなければ，基底状態である真空状態が定義できない．ところが，一般に曲がった時空においては真空の定義に不定性があることが知られている．これは物理的に，真空状態という概念が観測者に依存することを反映している．一般に曲がった時空での真空状態として，短波長極限で平坦時空の真空状態になるものを選ぶことにより，この不定性を除去できる．すなわち，式 (8.107) の解が，短波長極限で平面波解 (8.91) に近づくものとする．このように選ばれた真空のことを**バンチ-デービス真空** (Bunch-Davis vacuum) という．

ハンケル関数の引数が大きい極限における漸近形は，$x \to \infty$ のとき，

$$H_\nu^{(1)}(x) \to \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left[i\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi\nu}{2}\right)\right] \tag{8.109}$$

$$H_\nu^{(2)}(x) \to \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left[-i\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi\nu}{2}\right)\right] \tag{8.110}$$

である．すると，式 (8.107) が式 (8.91) の極限を持つという条件から

$$\alpha_k = \exp\left[\frac{i\pi}{2}\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\right], \quad \beta_k = 0 \tag{8.111}$$

と選ばれることがわかる．したがって，バンチ-デービス真空によって規定されるモード関数の解は

$$u_k(\tau) = \sqrt{\frac{\pi}{4k}} e^{i\pi(\nu+1/2)/2} \sqrt{-k\tau} H_\nu^{(1)}(-k\tau) \tag{8.112}$$

となる．

一方，第 1 種ハンケル関数の引数が小さい極限における漸近形は，$x \to 0$ のとき，

$$H_\nu^{(1)}(x) \to \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-i\pi/2} 2^{\nu-3/2} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(3/2)} x^{-\nu} \tag{8.113}$$

である．したがって，式 (8.112) の長波長極限 $-k\tau \ll 1$ における漸近形は

$$u_k \to \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{i\pi(\nu-1/2)/2} 2^{\nu-3/2} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(3/2)} (-k\tau)^{1/2-\nu} \tag{8.114}$$

となる．ここで式 (8.105) によりスローロール・パラメータの 1 次まで展開すると

$$2^{\nu-3/2} \simeq 1 + (3\epsilon - \eta)\ln 2, \quad \Gamma(\nu) \simeq \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\left[1 + (3\epsilon - \eta)\,\psi\left(\frac{3}{2}\right)\right] \tag{8.115}$$

となる．ただし $\psi(x) = d\ln\Gamma(x)/dx$ はディガンマ関数を表す．半整数に対するディガンマ関数の公式 (B.16) により，上式に現れる値は $\psi(3/2) = -\gamma - 2\ln 2 + 2$ である．ただし $\gamma = 0.5772\cdots$ はオイラーの定数である．また，式 (8.102), (8.105) により，

$$(-k\tau)^{1/2-\nu} \simeq (1-\epsilon)\left(\frac{k}{\mathscr{H}}\right)^{-1-3\epsilon+\eta} \tag{8.116}$$

と展開できる．ただし，波数 k の値は大きくなり得るので，そのべき指数に現れるスローロール・パラメータは多項式に展開せずに残した．式 (8.115), (8.116) を長波長極限の式 (8.114) へ代入すると，スローロールの 1 次近似で

$$u_k \simeq \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{i\pi(1+3\epsilon-\eta)/2} \left[1 - (3\gamma + 3\ln 2 - 5)\,\epsilon + (\gamma + \ln 2 - 2)\,\eta\right] \left(\frac{k}{\mathscr{H}}\right)^{-1-3\epsilon+\eta} \tag{8.117}$$

が得られる．

一方，式 (8.57) と式 (8.99) 第 2 式から $\mathscr{H}'$ を消去することにより，スローロール近似で

$$\epsilon \simeq \frac{4\pi G \bar{\phi}'^2}{\mathscr{H}^2} \tag{8.118}$$

となることがわかる．したがって式 (8.70) は

$$z \simeq a \sqrt{\frac{\epsilon}{4\pi G}} \tag{8.119}$$

と表すことができる．式 (8.117), (8.119) により，式 (8.94) における係数 $C(k)$ の絶対値は

$$|C(k)| \simeq \left|\frac{u_k}{z}\right| \simeq \sqrt{\frac{2\pi G H^2}{\epsilon k^3}} \left(\frac{k}{\mathscr{H}}\right)^{\eta-3\epsilon} \quad (k \ll \mathscr{H}) \tag{8.120}$$

と求められる．ただし，波数 k のべき乗の部分を除いた振幅係数の部分については，スローロール・パラメータの 1 次の項を無視する近似を用いた．

8.2.4 量子ゆらぎから古典ゆらぎへの転移

上に計算したものは，スカラー場に起因する量子ゆらぎである．一方，我々に観測される宇宙において，密度ゆらぎは完全に古典的な量である．量子ゆらぎと古典ゆらぎの関係はけっして自明ではない．量子ゆらぎが我々の宇宙の構造の起源であるならば，それはどこかで古典ゆらぎに転化するものと考えられる．量子論の一般論として，量子的状態が古典的状態に転化する機構は，理論的にもっとも不明瞭な部分である．通常の量子論の枠組みでは，観測行為に対して確率解釈を採用することにより，物理量の古典化についての詳細な機構の解明を回避して観測量の理論的予言をするように構成されている．通常の量子論が取り扱う微視的な測定についてはそれで問題ないが，巨視的な物理量が古典化する過程の本質については基礎的な未解決問題となっていて，量子論の観測問題と呼ばれている．

宇宙の構造形成は，古典的かつ巨視的なゆらぎにより引き起こされている．この

ゆらぎがインフレーション中の量子ゆらぎから発生するならば，古典化の過程が必要である．ゆらぎの波長がハッブル半径よりもずっと短い $k/\mathscr{H} \gg 1$ の場合には，式 (8.91) にあるようにモード関数は $u_k = e^{-ik\tau}/\sqrt{2k}$ で与えられ，時間とともに大きく振動する．この結果，この波数に対応する場の演算子である式 (8.87) は

$$\tilde{u}(\boldsymbol{k},\tau) = \frac{1}{\sqrt{2k}}\left[e^{-ik\tau}a(\boldsymbol{k}) + e^{ik\tau}a^\dagger(-\boldsymbol{k})\right] \tag{8.121}$$

となって，生成演算子と消滅演算子の重ね合わせの係数が時間的に大きく変化する．このため，場の演算子の固有状態が大きく変化する．これは完全に量子的な状態である．なぜなら，古典的な場は決まった固有状態になっているからである．

一方，ゆらぎの波長がハッブル半径を大きく超えて $k/\mathscr{H} \ll 1$ となる場合，式 (8.94) にあるようにモード関数の時間変化は実数値関数 $z(\tau)$ で与えられる単調なものになる．すなわち，複素位相は固定されたまま変化しない．このとき式 (8.87) は

$$\tilde{u}(\boldsymbol{k},\tau) = z(\tau)\left[C(k)a(\boldsymbol{k}) + C^*(k)a^\dagger(-\boldsymbol{k})\right] \tag{8.122}$$

となる．これは式 (8.121) と異なり，振幅だけが時間的に変化して，生成演算子と消滅演算子の重ね合わせの係数は変化しない．すなわち，時間的に変化しない固有状態を持つため，古典的な振る舞いをする．このことにより，インフレーション理論では通常，インフレーション中にゆらぎの波長がハッブル半径を超えることで，そのゆらぎが古典化するものと仮定される．

ただし，ゆらぎが古典的な振る舞いをすることと，実際に古典化することとは異なる．伝統的な量子論の立場に立てば，量子ゆらぎは観測者に観測されるまで古典化しない．これをそのまま受けとれば，ハッブル半径を超えた量子ゆらぎも，さまざまな固有状態が重ね合わせられたまま時間発展することになる．そして，その固有状態のどれかが選びとられるのは観測者が観測した時点であるということになる．だが，このような見方は非常に奇異なものであるのも事実である．たとえば，宇宙マイクロ波背景放射や大規模構造なども，我々に観測されるまで量子論的な重ね合わせ状態にあるということになる．これは量子力学における「シュレーディンガーの猫」の問題と本質的に同じものである．

量子論の一般的な問題として，このような概念的問題には明解な答えが出ていない．インフレーション理論の立場としては，ハッブル半径を超えたゆらぎはとにかく古典化するものと仮定する．この仮定により，量子的なゆらぎの統計量を古典的なゆらぎの統計量と同一視し，そこから観測量の予測を行うという手続きを踏む．

式 (8.95) で計算したのはハッブル半径を超えた量子的な曲率ゆらぎのパワースペクトルであるが，これをそのまま古典的な曲率ゆらぎのパワースペクトルだとみなすのである．古典的な曲率ゆらぎのフーリエ変換を $\tilde{\zeta}(\boldsymbol{k})$ とすると，そのパワースペクトル $P_\zeta(k)$ は統計平均 $\langle\cdots\rangle$ により

$$\left\langle\tilde{\zeta}(\boldsymbol{k})\tilde{\zeta}(\boldsymbol{k}')\right\rangle = (2\pi)^3\delta_{\mathrm{D}}^3(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')P_\zeta(k) \tag{8.123}$$

で定義される．これを式 (8.88) と比較してみれば，量子ゆらぎの真空期待値を，古典ゆらぎの統計平均で置き換えていることになる．ハッブル半径を超えた曲率ゆらぎは古典的なゆらぎとして進化し，インフレーションが終わると再びハッブル半径の中に入ってくる．これが最終的に我々が観測する密度ゆらぎの種になるものと考える．

量子論は，観測問題のような概念的に難しい問題を含んでいても，実験事実を十分整合的に説明できるという意味で正しい．量子論の正当性を，実験事実なしに理論だけから導くことはできない．インフレーション理論における量子ゆらぎの古典化の仮定は，通常の量子論を拡大解釈したものである．最終的にその正当性は，インフレーション理論が宇宙観測を十分整合的に説明できるかどうかで判断されるべきである．

8.2.5 初期ゆらぎのスペクトル

インフレーション理論では，上に述べた過程を通じて，ハッブル半径より大きな波長に古典ゆらぎが生成される．このゆらぎは，その後の時間発展に対するゆらぎの初期条件を与える．これを**初期ゆらぎ** (initial fluctuations) という．以下では，インフレーション理論の予言する初期ゆらぎを具体的に導く．

スカラー場が支配的になるインフレーション中のエントロピーゆらぎは，式 (8.65) で与えられる．スローロールの最低次では，式 (8.12), (8.18) により $\bar{p}_\phi \simeq -V(\phi)$ となることと，式 (8.96), (8.98) を用いることにより，エントロピーゆらぎの式 (8.65) は

$$\Gamma_\phi \simeq -\frac{4}{3}\frac{\triangle\Phi}{\mathscr{H}^2} \tag{8.124}$$

となることがわかる．フーリエ空間でこれは $(k/\mathscr{H})^2$ に比例するので，ハッブル半径より大きな波長では，エントロピーゆらぎが無視できる．すなわち，単一場スローロール・インフレーションにより生成されるゆらぎは，エントロピーゆらぎのない初期ゆらぎとなる．この型の初期ゆらぎを**断熱ゆらぎ** (adiabatic fluctuations)

という．

式 (7.231) において見たように，曲率やエントロピーゆらぎが無視できる場合には，ハッブル半径より波長の長い曲率ゆらぎが時間的に一定に保たれる．インフレーションが起きるとすぐに曲率も無視できるようになるので，ハッブル半径を超える波長の曲率ゆらぎは一定に保たれる．インフレーション中にハッブル半径を超える波長で生成された曲率ゆらぎは，その波長がハッブル半径を超えている限り，インフレーションが終了した後でもその振幅が変化しない．式 (8.95), (8.120) により，ハッブル半径を超える波長に対する曲率ゆらぎのパワースペクトルは

$$P_\zeta(k) = \frac{2\pi G H^2}{\epsilon k^3}\left(\frac{k}{\mathscr{H}}\right)^{2\eta-6\epsilon} = \frac{2\pi H^2}{{m_{\rm Pl}}^2\epsilon k^3}\left(\frac{k}{\mathscr{H}}\right)^{2\eta-6\epsilon} \tag{8.125}$$

となる．あるいは

$$\mathscr{P}_\zeta(k) = \frac{k^3}{2\pi^2}P_\zeta(k) \tag{8.126}$$

で定義される無次元化されたパワースペクトルを用いて表せば，

$$\mathscr{P}_\zeta(k) = \frac{4\pi}{{m_{\rm Pl}}^2\epsilon}\left(\frac{H}{2\pi}\right)^2\left(\frac{k}{\mathscr{H}}\right)^{2\eta-6\epsilon} \tag{8.127}$$

となる．

スローロールの最低次では，無次元化されたパワースペクトルの k 依存性が消えて，スケールによらずに一定になることがわかる．これを**スケール不変スペクトル** (scale-invariant spectrum) という．インフレーション理論の提唱される以前から，初期ゆらぎはスケール不変スペクトルに近いことが観測的に知られていた．スローロール・インフレーションは，この事実を理論的に説明することになる．初期曲率ゆらぎのパワースペクトルに対する k 依存性を

$$\mathscr{P}_\zeta(k) \propto k^{n_{\rm s}-1} \tag{8.128}$$

と表すとき，べき指数 $n_{\rm s}$ を初期ゆらぎの**スペクトル指数** (spectral index) という．ここで $n_{\rm s} = 1$ がスケール不変スペクトルに対応する．さらに，スローロール・パラメータの 1 次の効果によって，スケール不変性は少し破れる．式 (8.127) と式 (8.128) を比較することにより，スローロール・インフレーションに基づいたスペクトル指数の値は

$$n_{\rm s} = 1 - 6\epsilon + 2\eta \tag{8.129}$$

で与えられる．

上に求められたスペクトル指数は，スローロール・パラメータを一定としたときの近似的な値である．一方，

$$n_s(k) = 1 + \frac{d \ln \mathscr{P}_\zeta}{d \ln k} \tag{8.130}$$

によって**有効スペクトル指数** (effective spectral index) を定義することもできる．パワースペクトルが完全にべき乗の形で与えられる場合，この有効スペクトル指数は式 (8.128) のスペクトル指数に等しい．だが，インフレーション中にスローロール・パラメータが変化する場合，式 (8.127) のべき乗に現れるスローロール・パラメータは，ゆらぎが生成されたときの値である．波数 k のゆらぎは，インフレーション中にその波長がハッブル半径程度となる時刻以降で生成される．すなわち $k = \mathscr{H} = aH$ となる時刻以降である．これにより，波数 k に対応する波長と，それがハッブル半径を超える時刻 τ を対応づけることができる．インフレーション中は H がほぼ一定なので，スローロール最低次の近似で

$$\frac{d}{d \ln k} = a \frac{d}{da} = \frac{1}{\mathscr{H}} \frac{d}{d\tau} \tag{8.131}$$

となる．この関係と式 (8.100), (8.129) により，有効スペクトル指数の変化率として

$$\frac{dn_s}{d \ln k} = 16\epsilon\eta - 24\epsilon^2 - 2\xi^2 \tag{8.132}$$

が得られる．この量 $dn_s/d \ln k$ を**走るスペクトル指数** (running spectral index) という．

インフレーションが終了した後，非等方応力，曲率 K と宇宙定数 Λ を無視する近似でゆらぎの進化を考える．このとき計量のゆらぎについて $\Psi = -\Phi$ が成り立ち，さらに $\Omega = 1$ となるので，曲率ゆらぎを与える式 (7.225) は

$$\zeta = -\Phi - \frac{2}{3} \cdot \frac{\Phi + \mathscr{H}^{-1}\Phi'}{1 + w} \tag{8.133}$$

となる．ハッブル半径を超える波長スケールでは，この曲率ゆらぎの振幅は一定である．一方，ゲージ不変ポテンシャル Φ はハッブル半径を超える波長において振幅が変化し得る．このポテンシャルのパワースペクトル $P_\Phi(k)$ を求めるためには，宇宙の状態方程式を指定してゆらぎの成長を求める必要がある．ここでは，ポテンシャル Φ の振幅が変化しないような，特別の場合に成り立つ簡単な関係を求めておく．次章で示されるように，放射優勢期 (RD, $w = 1/3$) や物質優勢期 (MD, $w = 0$) のように，状態方程式パラメータ w が一定に保たれる場合には，ハッブル

半径を超える波長のポテンシャルは成長しない．この単純な場合，曲率ゆらぎとポテンシャルの関係 (8.133) は

$$\Phi = -\frac{3+3w}{5+3w}\zeta = -\zeta \times \begin{cases} 2/3 & \text{(RD)} \\ 3/5 & \text{(MD)} \end{cases} \tag{8.134}$$

となる．曲率ゆらぎは放射優勢期でも物質優勢期でも時間的に一定であるから，放射優勢期にハッブル半径内に入ってくる波長のポテンシャルの振幅と，物質優勢期に入ってくる振幅とは，9/10 倍だけ後者の方が小さい．結局，インフレーションにより生成されたポテンシャルの（無次元化された）パワースペクトルは，放射優勢期と物質優勢期の漸近的な形として

$$\mathscr{P}_\Phi(k) = \left(\frac{3+3w}{5+3w}\right)^2 \mathscr{P}_\zeta(k) = \frac{4\pi}{m_{\mathrm{Pl}}{}^2\epsilon}\left(\frac{H}{2\pi}\right)^2\left(\frac{k}{\mathscr{H}}\right)^{n_\mathrm{s}-1} \times \begin{cases} 4/9 & \text{(RD)} \\ 9/25 & \text{(MD)} \end{cases} \tag{8.135}$$

となる．

観測により求められるスカラー型成分に対する初期ゆらぎの振幅は，あまりスケールによらず，$\mathscr{P}_\Phi \sim 10^{-10}$ となることが知られている．スローロール条件が満たされるとき $n_\mathrm{s} \simeq 1$ であるから，式 (8.135) により，$H^2 \sim 10^{-10} m_{\mathrm{Pl}}{}^2\epsilon$ が満たされるべきである．ただし，おおまかな見積もりのため数値因子は無視した．ここで，インフレーション中のハッブル・パラメータ H の値は式 (8.19) により $H^2 \sim V(\phi)/m_{\mathrm{Pl}}{}^2$ となるから，上の条件は

$$V(\phi) \sim 10^{-10}\, m_{\mathrm{Pl}}{}^4\, \epsilon \tag{8.136}$$

となる．この関係は，具体的なスローロール・インフレーションのモデルに対して，おおまかな観測的制限を与える．

具体例として，8.1.5 項で取り上げた大きな場のインフレーション（カオス的インフレーション）を考えてみよう．この場合には，インフレーション中の場の値がプランク質量程度 ($\phi \sim m_{\mathrm{Pl}}$) で推移するのであった．このことと式 (8.29), (8.31) を用いると，上で求められた観測的な制限はおおまかに $g \sim 10^{-10}\, m_{\mathrm{Pl}}{}^{4-p}$ となる．現実の宇宙における初期ゆらぎの振幅が小さいことに対応して，このモデルでは結合定数の値を不自然にかなり小さく選ぶ必要がある．

8.3 重力波の生成

8.3.1 重力場の量子ゆらぎ

ここまでは，スローロール・インフレーションにおけるスカラー型ゆらぎの生成をくわしく見てきた．これに対して，ベクトル型ゆらぎはスカラー場に含まれない．また，計量ゆらぎとして生成されたとしてもこのベクトル型のモードは成長せずに減衰してしまい，その後の宇宙の進化にとって重要ではない．

一方，テンソル型ゆらぎは重力波に対応する．テンソル型ゆらぎもスカラー場には含まれないが，計量のゆらぎとしてテンソル型ゆらぎが生成される．インフレーション中に重力波が生成されるならば，それは弱いながらも宇宙全体に存在する背景重力波として存在することになる．重力波は現在のところ直接的に観測されている量ではないが，将来的には観測可能な影響を及ぼす可能性があるため，広く興味が持たれている．インフレーションにより生成される重力波の振幅は，スカラーゆらぎの場合とほとんど同様に計算できる．すなわち，インフレーション期における計量場の量子ゆらぎが，ハッブル半径を超えて古典ゆらぎになり，それが重力波になるとして求められる．

本来，計量場の量子ゆらぎを正しく扱うには，重力場の量子論が必須である．ところが現在のところ，重力場を整合的に量子化する理論は完成されていない．場の理論における摂動論では，一般に摂動の高次補正に発散項が生じる．素粒子標準モデルにおける場の理論では，くりこみという有限の手続きによって整合的に発散項を観測可能量から除去できる．ところが，重力場についてはこの手法が使えず，素朴な重力場の量子論はくりこみ不可能な理論になっている．すなわち，重力場の高次補正に現れる発散項を，整合的に除去することができない．これは理論自体に整合性がないことを意味している．

このような困難があるため，計量場の量子ゆらぎの計算は形式的に高次補正を無視して行う．つまり，理論の整合性には目をつむり，背景計量を固定して線形摂動計量だけを量子化する．これは完全に現象論的な方法である．通常の量子論における半古典極限のように，正確な重力の量子論の近似理論となっていることを期待するのである．このことを認めれば，スカラー場の場合と同様に量子ゆらぎの生成を計算することができる．その計算が実際に正当化できるのかどうか明らかではないが，少なくとも観測可能量を予言するという点においては意味があると考えられ

る．ここでもまた，最終的には観測との比較によって，その正当性を判断することが必要である．

8.3.2 重力波の作用積分

前章で導入されたテンソル型ゆらぎ $E^{(\mathrm{T})}{}_{ij}$ はトレースと発散を持たない成分であった．すなわち，4 つの拘束条件 $E^{(\mathrm{T})}{}_i{}^i = 0$, $E^{(\mathrm{T})}{}_{ij}{}^{|j} = 0$ を満たす．したがってこの 3 次元 2 階対称テンソルに含まれる 6 つの成分のうち，実際の自由度は 2 つである．この 2 自由度は重力波の偏極自由度に対応する．線形近似において，スカラー型成分とベクトル型成分はテンソル型成分とは完全に独立な自由度であるから，いまは考えない．また，スカラー場は非等方応力を持たないため，エネルギー運動量テンソルにはテンソル型成分が含まれず，重力波モードは物質場と独立に取り扱える．さらに，テンソル型摂動はそのままゲージ不変であるから，ゲージ自由度に煩わされることもなく，偏極の 2 自由度はそのまま物理的な自由度である．

上述のように重力波モードはスカラー場と独立であるため，インフレーション中の作用積分の式 (8.71) において，スカラー場の寄与を除いた

$$S = \frac{1}{16\pi G}\int \sqrt{-g}\, d^4x\, R \tag{8.137}$$

という作用積分を考える．これは式 (3.301) の右辺第 1 項に対応するアインシュタイン–ヒルベルト作用において，宇宙項がない場合に対応する．ここから計量に対する線形近似の運動方程式を得るには，作用積分を計量の 2 次摂動まで展開したものを用いればよい．これは，7.1.1 項で行った 1 次摂動までの計算を 2 次摂動にまで拡張して実行することができるが，とても長い計算が必要になる．そこでここでは，スカラー場のゆらぎにおいて行った考察と同様に，作用積分が線形近似の運動方程式を導くという条件により，作用積分の 2 次摂動の形を決定する．

テンソル型摂動のみに着目すると，線素は

$$ds^2 = a^2(\tau)\left[-d\tau^2 + \left(\gamma_{ij} + h^{(\mathrm{T})}{}_{ij}\right)dx^i dx^j\right] \tag{8.138}$$

で与えられる．ここで $h^{(\mathrm{T})}{}_{ij}$ がテンソル型摂動であり，7.2.2 項で定義された $E^{(\mathrm{T})}{}_{ij}$ とは，

$$h^{(\mathrm{T})}{}_{ij} = 2E^{(\mathrm{T})}{}_{ij} \tag{8.139}$$

の関係にある．式 (3.278) によれば，計量の逆行列に関する変分 $\delta g^{\mu\nu}$ は，線形近似で空間成分の添字を持つものしか残らず，

$$\delta g^{ij} = -\frac{1}{a^2}\delta h^{(\mathrm{T})ij} \tag{8.140}$$

となる．ここで，式 (7.37) で与えられるアインシュタイン・テンソルの空間成分からテンソル型成分を取り出す．式 (7.141) を導出したときと同様の計算により，$g_{\mu\nu}$ で添字を下ろしたアインシュタイン・テンソルを求めると，

$$G^{(\mathrm{T})}{}_{ij} = \frac{1}{2}\left[h^{(\mathrm{T})}{}_{ij}{}'' + 2\mathscr{H}h^{(\mathrm{T})}{}_{ij}{}' - (\Delta - 2K)\,h^{(\mathrm{T})}{}_{ij}\right] \tag{8.141}$$

が得られる．ただし $G^{(\mathrm{T})}{}_{ij}$ は背景成分を取り除いた線形アインシュタイン・テンソルとする．式 (8.138) の計量に関する作用積分の式 (8.137) から 2 次の摂動項だけを取り出したものを $S^{(2)}$ とすると，式 (3.290), (8.140), (8.141) により

$$\delta S^{(2)} = \frac{1}{16\pi G}\int a^4 d\tau\,\sqrt{\gamma}d^3x\,G^{(\mathrm{T})}{}_{ij}\delta g^{ij} \tag{8.142}$$

$$= -\frac{1}{32\pi G}\int a^2 d\tau\,\sqrt{\gamma}d^3x\left[h^{(\mathrm{T})}{}_{ij}{}'' + 2\mathscr{H}h^{(\mathrm{T})}{}_{ij}{}' - (\Delta - 2K)\,h^{(\mathrm{T})}{}_{ij}\right]\delta h^{(\mathrm{T})ij} \tag{8.143}$$

が得られる．この変分の形を導く作用積分は容易に得られ，

$$S^{(2)} = \frac{1}{64\pi G}\int a^2 d\tau\,\sqrt{\gamma}d^3x\left(h^{(\mathrm{T})ij\prime}h^{(\mathrm{T})}{}_{ij}{}' - h^{(\mathrm{T})ij}{}_{|k}h^{(\mathrm{T})}{}_{ij}{}^{|k} - 2Kh^{(\mathrm{T})ij}h^{(\mathrm{T})}{}_{ij}\right) \tag{8.144}$$

であることがわかる．この作用積分は，表面積分で消える項を除けば，式 (8.137) から 2 次の摂動項だけを取り出して，背景時空の方程式を代入したものに等しくなる．

ここまでは一般的な考察をしたが，これ以下では初期宇宙への応用を考えるため，平坦な背景 3 次元空間を考えて $K = 0, \gamma_{ij} = \delta_{ij}$ とする．この場合，3 次元空間の添字 i, j の上下は区別しなくてよいので，つねに下付きの添字で表すことにする．また，繰り返し現れる添字について和をとる約束を保持する．ここで次の変数

$$v_{ij} = \frac{a(\tau)}{\sqrt{32\pi G}}\,h^{(\mathrm{T})}{}_{ij} \tag{8.145}$$

を導入すると，上に導いた 2 次の作用積分は，時間変数の表面積分で消える項を除いて

$$S^{(2)} = \frac{1}{2}\int d\tau d^3x\left(v_{ij}{}'v_{ij}{}' - v_{ij|k}v_{ij|k} + \frac{a''}{a}v_{ij}v_{ij}\right) \tag{8.146}$$

となる．ここから変分原理によって導かれる運動方程式は

$$v_{ij}'' - \Delta v_{ij} - \frac{a''}{a} v_{ij} = 0 \tag{8.147}$$

である．この方程式は，スカラー場の線形摂動に対する運動方程式 (8.69) において，$z \to a$ と置き換えたものに等しい．偏極の自由度が 2 つあることを別にすれば，重力波モードも形式的にスカラー場の場合と同様に量子化することができ，量子ゆらぎを求めることができる．

8.3.3 初期重力波の平面波展開とスペクトル

重力波に対する 2 つの偏極自由度の基底として，実対称行列で与えられる偏極テンソル $\mathrm{e}_{ij}^{(+)}, \mathrm{e}_{ij}^{(\times)}$ を導入し，テンソル型摂動変数 v_{ij} の平面波展開を

$$v_{ij}(\boldsymbol{x}, \tau) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda=+,\times} \mathrm{e}_{ij}^{(\lambda)}(\boldsymbol{k}) \left[v_k(\tau) a_\lambda(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + v_k{}^*(\tau) a_\lambda{}^\dagger(\boldsymbol{k}) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \right] \tag{8.148}$$

とする．ここで変数 v_{ij} がテンソル型の線形摂動であるから，式 (7.103) の第 2 式と第 3 式により，偏極テンソルは

$$k_i \, \mathrm{e}_{ij}^{(\lambda)}(\boldsymbol{k}) = 0, \qquad \mathrm{e}_{ii}^{(\lambda)}(\boldsymbol{k}) = 0 \tag{8.149}$$

を満たす．さらに，基底の直交規格化条件として

$$\mathrm{e}_{ij}^{(\lambda)}(\boldsymbol{k}) \mathrm{e}_{ij}^{(\lambda')}(\boldsymbol{k}) = \delta_{\lambda\lambda'} \tag{8.150}$$

を満たすように選ぶ．具体的な例として，波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ が z 軸に一致する座標系における行列表現は

$$\left(\mathrm{e}_{ij}^{(+)}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \left(\mathrm{e}_{ij}^{(\times)}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8.151}$$

となる．一般の座標系の表現は，これらを 3 次元回転行列によりテンソルとして変換することで得られる．

平面波展開による各偏極自由度は独立なモードであるから，量子化された重力波の生成消滅演算子は，交換関係

$$\left[a_\lambda(\boldsymbol{k}), a_{\lambda'}{}^\dagger(\boldsymbol{k}')\right] = \delta_{\lambda\lambda'} (2\pi)^3 \delta^3(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}') \tag{8.152}$$

$$[a_\lambda(\boldsymbol{k}), a_{\lambda'}(\boldsymbol{k}')] = \left[a_\lambda{}^\dagger(\boldsymbol{k}), a_{\lambda'}{}^\dagger(\boldsymbol{k}')\right] = 0 \tag{8.153}$$

を満たす．各偏極モードごとにスカラー場と同じ方程式になっているから，初期重力波の量子ゆらぎを求める計算は，スカラー場の場合とまったく変わらない．

運動方程式 (8.147) により，モード関数 v_k の満たす方程式は

$$v_k'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right) v_k = 0 \tag{8.154}$$

であり，その規格化条件を

$$v_k \frac{\partial v_k^*}{\partial \tau} - \frac{\partial v_k}{\partial \tau} v_k{}^* = i \tag{8.155}$$

とする．スローロール近似において，この運動方程式を解く．まず，スローロール近似に対する関係式 (8.99) の第 2 式より，

$$\frac{a''}{a} = \mathscr{H}' + \mathscr{H}^2 \simeq \mathscr{H}^2 (2 - \epsilon) \tag{8.156}$$

が成り立つ．ここで変数 μ を

$$\frac{a''}{a} = \frac{\mu^2 - 1/4}{\tau^2} \tag{8.157}$$

で定義して，式 (8.102) を用いると，スローロールの 1 次近似で

$$\mu \simeq \frac{3}{2} + \epsilon \tag{8.158}$$

である．このとき方程式 (8.154) は

$$\frac{d^2 v_k}{d\tau^2} + \left[k^2 - \left(\mu^2 - \frac{1}{4}\right)\frac{1}{\tau^2}\right] v_k = 0 \tag{8.159}$$

となる．この方程式は，スカラー場に対する方程式 (8.106) と同じ形をしていて，$\nu \to \mu$ または $\eta \to 2\epsilon$ と置き換えたものになっている．したがって，式 (8.114) と同様に，解の長波長極限 $-k\tau \ll 1$ における漸近形は，

$$v_k \to \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{i\pi(\mu-1/2)/2} 2^{\mu-3/2} \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(3/2)} (-k\tau)^{1/2-\mu} \tag{8.160}$$

となる．また，式 (8.117) に対応して，スローロールの 1 次近似で

$$v_k \simeq \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{i\pi(1+\epsilon)/2} \left[1 - (\gamma + \ln 2 - 1)\,\epsilon\right] \left(\frac{k}{\mathscr{H}}\right)^{-1-\epsilon} \tag{8.161}$$

が得られる．波数 k のべき乗の部分を除いた振幅係数の部分について，スローロールの最低次だけを残す近似を適用すると，上式の絶対値は

$$|v_k| \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{aH}{k^{3/2}} \left(\frac{k}{\mathscr{H}}\right)^{-\epsilon} \tag{8.162}$$

で与えられる．

初期重力波のパワースペクトルを求めるため，量子化されたテンソル型摂動 $h^{(\mathrm{T})}{}_{ij}$ を，式 (8.148) と同様に平面波展開して

$$h^{(\mathrm{T})}{}_{ij}(\boldsymbol{x},\tau) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda=+,\times} \mathrm{e}_{ij}^{(\lambda)}(\boldsymbol{k}) \left[h_k^{(\mathrm{T})}(\tau)\, a_\lambda(\boldsymbol{k}) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + h_k^{(\mathrm{T})*}(\tau)\, a_\lambda{}^\dagger(\boldsymbol{k}) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \right] \tag{8.163}$$

とすると，その係数は

$$h_k^{(\mathrm{T})}(\tau) = \frac{\sqrt{32\pi G}}{a(\tau)} v_k(\tau) \tag{8.164}$$

で与えられる．ここでテンソル型摂動の空間依存性をフーリエ変換すると，

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{ij}^{(\mathrm{T})}(\boldsymbol{k},\tau) &= \int d^3x e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} h_{ij}^{(\mathrm{T})}(\boldsymbol{x},\tau) \\ &= \sum_{\lambda=+,\times} \left[\mathrm{e}_{ij}^{(\lambda)}(\boldsymbol{k}) h_k^{(\mathrm{T})}(\tau) a_\lambda(\boldsymbol{k}) + \mathrm{e}_{ij}^{(\lambda)}(-\boldsymbol{k}) h_k^{(\mathrm{T})*}(\tau) a_\lambda{}^\dagger(-\boldsymbol{k}) \right] \end{aligned} \tag{8.165}$$

となる．テンソル型摂動のパワースペクトル $P_{\mathrm{T}}(k)$ は，量子ゆらぎの真空期待値により

$$\left\langle 0 \left| \tilde{h}_{ij}^{(\mathrm{T})}(\boldsymbol{k},\tau) \tilde{h}_{ij}^{(\mathrm{T})}(\boldsymbol{k}',\tau) \right| 0 \right\rangle = (2\pi)^3 \delta^3(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}') P_{\mathrm{T}}(k,\tau) \tag{8.166}$$

で定義される．生成消滅演算子の交換関係 (8.152) と，偏極テンソルの直交規格化の関係式 (8.150) を用いてこれを計算すれば，

$$P_{\mathrm{T}}(k,\tau) = 2 \left| h_k^{(\mathrm{T})}(\tau) \right|^2 \tag{8.167}$$

が得られる．この結果に式 (8.164), (8.162) を代入することにより

$$P_{\mathrm{T}}(k,\tau) = \frac{32\pi G H^2}{k^3} \left(\frac{k}{\mathscr{H}}\right)^{-2\epsilon} = \frac{32\pi H^2}{m_{\mathrm{Pl}}{}^2 k^3} \left(\frac{k}{\mathscr{H}}\right)^{-2\epsilon} \tag{8.168}$$

が得られる．あるいは無次元化されたパワースペクトル $\mathscr{P}_{\mathrm{T}}(k) = k^3 P_{\mathrm{T}}(k)/2\pi^2$ で表せば

$$\mathscr{P}_{\mathrm{T}}(k) = \frac{64\pi}{m_{\mathrm{Pl}}{}^2} \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{k}{\mathscr{H}}\right)^{-2\epsilon} \tag{8.169}$$

となる．したがって，スローロール・インフレーションは初期重力波についてもほ

ぼスケール不変なパワースペクトルを予言する．

初期重力波のスペクトル指数 $n_{\rm T}$ は，無次元パワースペクトル $\mathscr{P}_{\rm T}(k)$ における波数 k のべき指数として定義される．スローロール・インフレーションの場合，それはスローロール・パラメータ ϵ のみで与えられ，

$$n_{\rm T} = \frac{d\ln\mathscr{P}_{\rm T}}{d\ln k} = -2\epsilon \tag{8.170}$$

である．この値はスローロールの 1 次近似で定数であるが，2 次近似で有効スペクトル指数は変化する．式 (8.100), (8.131) により走るスペクトル指数を求めると，

$$\frac{dn_{\rm T}}{d\ln k} = 4\epsilon\eta - 8\epsilon^2 \tag{8.171}$$

が得られる．

テンソル型摂動とスカラー型摂動のパワースペクトルの比 r は，式 (8.127), (8.169) によりスローロールの最低次で

$$r = \frac{\mathscr{P}_{\rm T}(k)}{\mathscr{P}_{\zeta}(k)} = 16\epsilon \tag{8.172}$$

を満たす．この比 r のことを**テンソル・スカラー比** (tensor-to-scalar ratio) という．この結果とテンソル型摂動のスペクトル指数の式 (8.170) により，単一のスカラー場によるスローロール・インフレーションのモデルではスローロールの最低次で，

$$n_{\rm T} = -\frac{r}{8} \tag{8.173}$$

という関係が必ず満たされる．この式は**無矛盾性関係** (consistency relation) と呼ばれる関係式の 1 つである．初期ゆらぎのテンソル型成分を観測して，この関係が成り立つかどうかを判定することができれば，単一のスカラー場によるインフレーション・モデルの成否に対する重要な手がかりを得ることができる．現在のところ，初期重力波は直接的にも間接的にも観測されていない．上の無矛盾性関係を確かめるには，初期重力波スペクトルの振幅だけでなく，その傾きも同時に決定する必要があり，観測的には容易なことでない．だが，初期宇宙の探求にとっては重要な道標となるだろう．

観測値から見積もられる式 (8.136) と式 (8.172) からスローロール・パラメータ ϵ を消去すると，

$$V^{1/4} \sim \left(\frac{r}{0.1}\right)^{1/4} 10^{16}\ {\rm GeV} \tag{8.174}$$

となる．すなわち，単一場のスローロール・インフレーションでは，テンソル・ス

カラー比 r が，インフレーションのエネルギー・スケールに関係している．この比 r の値がある程度小さくても，それが極端にゼロに近いのでない限り，インフラトン場の持つエネルギー・スケールは大統一理論のスケールである 10^{15} GeV 程度となる．

また，式 (8.22) の両辺を微分したものに対して，式 (8.25) 第 1 式と式 (8.172) を用いると，スローロール近似において

$$\left(\frac{d\phi}{dN}\right)^2 \simeq \frac{{m_{\rm Pl}}^2}{64\pi} r \tag{8.175}$$

が得られる．スローロールの間はテンソル・スカラー比 r が近似的に一定であることから，上の式を近似的に積分すると，

$$\frac{\Delta\phi}{m_{\rm Pl}} \simeq N\sqrt{\frac{r}{64\pi}} \sim 0.02N\left(\frac{r}{0.1}\right)^{1/2} \tag{8.176}$$

が得られる．ただし，$\Delta\phi$ は，インフレーション期の任意時刻からインフレーション終了時までに変化した場の値の絶対値 $\Delta\phi = |\phi(t) - \phi_{\rm f}|$ であり，N はその膨張指数である．もし，テンソル・スカラー比 r の値が直接的に観測されたとするならば，その値はある程度大きくなければばならない．そうでなければ観測できないからである．この場合，式 (8.176) により，観測に対応するゆらぎの共動波長スケールが生成された時刻以降の場の変化量は，プランク質量程度になる．観測に対応する波長のゆらぎが生成される前にもインフレーションが続いていたのだから，インフレーション開始時からの場の変化量はそれよりも大きい．したがって，もしテンソル・スカラー比 r が直接観測で求められるほど大きな値であるならば，インフレーション期における場の値の変化量は，$\Delta\phi \gtrsim m_{\rm Pl}$ を満たすことがわかる．このことを**ライス限界** (Lyth bound) という．

第 9 章

線形摂動の時間発展

初期の宇宙はきわめて一様性が高く，目立った構造のようなものはなかった．ところが，現在の宇宙には星や銀河をはじめとするさまざまな天体が存在し，さらには我々自身を含む生命が生まれているなど，きわめて複雑な構造に満ちあふれている．現在の宇宙に見られる複雑な構造は，宇宙の歴史の中で突然に発生したのではない．宇宙の初期に存在した微小な初期密度ゆらぎが，長い時間をかけて現在の構造に成長したと考えられる．

初期密度ゆらぎを成長させる原動力は，重力である．重力は引力であるために物質を集合させる性質を持ち，微小なゆらぎを大きなゆらぎへ成長させることができる．一方で，物質に働くのは重力の作用だけではなく，密度ゆらぎの成長を妨げる作用も働いている．ゆらぎの振幅があまり大きくない領域では，線形近似に基づいて，重力による構造の形成過程を調べることができる．

9.1 ゆらぎのモード分解

前章でも行ったように，空間的依存性をフーリエ変換し，フーリエ空間で変数を記述すると何かと便利である．その理由は主に，空間的な微分演算子 ∂_i がフーリエ空間において単に波数ベクトル k_i をかけるという単純な操作になること，また，線形方程式が波数ごとに独立した方程式になること，などの点にある．平坦な空間におけるフーリエ変換は単純で，直交基底 $e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$ により関数を平面波展開できる．このとき，ゆらぎのスケールは波数 $k \equiv |\boldsymbol{k}|$ によって特徴づけられ，その波長は $2\pi/k$ である．

観測によれば，宇宙の大局的な曲率 K は非常に小さく，式 (2.72) で定義される曲率パラメータで表すと $|\Omega_{K0}| < 0.004$ (1σ) という厳しい制限がつけられている．もし有限の曲率が存在したとしても，初期宇宙や小スケールに着目すると，非常に

よい近似で空間を平坦であるとして扱うことができる．とはいえ，理論的には厳密に曲率がゼロである理由はない．大局的に有限の曲率を持つ宇宙では，現在の宇宙の大スケールにその影響が現れる．宇宙に有限の曲率が存在するかどうかを調べるためには，一般に平坦でない空間のゆらぎを取り扱うことが必要である．この節では一般的な場合を考え，必ずしも曲率がゼロでない空間においてフーリエ変換を拡張する方法について述べる．

直交基底によって関数を独立成分へ分解することを**モード分解** (mode decomposition) という．直交基底 $e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$ による通常のフーリエ変換は，デカルト座標を張ることのできる平坦な空間上の関数をモード分解するのに用いることができるが，曲率のある空間に用いることはできない．一般の定曲率空間においてモード分解を行うには，3 次元ラプラシアン $\Delta = \nabla^i\nabla_i$ の固有関数を基底として，関数の完全系を構成するとよい．ただし ∇_i, $\nabla^i = \gamma^{ij}\nabla_j$ は 3 次元計量 γ_{ij} による 3 次元共変微分を表す．

平坦空間での平面波展開におけるモード関数 $e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$ は $(\Delta + k^2)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} = 0$ を満たし，固有値 $-k^2$ を持つラプラシアンの固有関数となっている．平坦でない一般の定曲率空間におけるモード関数についても，ラプラシアンの固有関数によって自然に定義できる．相対論的な線形摂動は SVT 分解されているので，摂動の型ごとにモード分解を考える．まず，スカラー型摂動のモード関数 $Q^{(\mathrm{S})}(\boldsymbol{x})$ として，微分方程式

$$(\Delta + k^2)Q^{(\mathrm{S})} = 0 \tag{9.1}$$

を満たす関数と定義する．平坦空間の場合，この微分方程式はヘルムホルツ方程式に等しい．上の微分方程式は定曲率空間に一般化したヘルムホルツ方程式である．

ベクトル型摂動のモード関数 $Q^{(\mathrm{V})}{}_i(\boldsymbol{x})$ およびテンソル型摂動のモード関数 $Q^{(\mathrm{T})}{}_{ij}(\boldsymbol{x})$ についても，同様に一般化したヘルムホルツ方程式を満たす関数と定義し，さらにそれぞれの型に対応する付加条件をつける．すなわち，ベクトル型摂動については

$$(\Delta + k^2)Q^{(\mathrm{V})}{}_i = 0, \qquad Q^{(\mathrm{V})}{}_i{}^{|i} = 0 \tag{9.2}$$

を満たす関数と定義し，テンソル型摂動については

$$(\Delta + k^2)Q^{(\mathrm{T})}{}_{ij} = 0, \qquad Q^{(\mathrm{T})}{}_i{}^i = 0, \qquad Q^{(\mathrm{T})}{}_{ij}{}^{|j} = 0 \tag{9.3}$$

を満たす関数と定義する．ベクトル型摂動とテンソル型摂動のモード関数の定義には複数の条件が課されているが，これらの条件は定曲率空間の場合，無矛盾に両立する．このことを見るには，定曲率空間の 3 次元曲率テンソルの式 (2.14) を使い，

ベクトルやテンソルに作用したときのラプラシアンと共変微分の交換関係を導くとよい．

定曲率空間は並進対称性を持つため，これらのモード関数は k について縮退した独立な解から構成される．たとえば最初に述べたように，平坦空間でスカラー型摂動を平面波展開すると，モード関数は直交基底 $Q^{(\mathrm{S})}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{x}) = e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$ で与えられる．この場合，波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ の方向は自由に選ぶことができるため，このモード関数はその自由度について縮退した解の集合となる．あるいは，平面波展開の代わりにフーリエ–ベッセル展開を適用することもでき，その場合は球座標の直交基底 $Q^{(\mathrm{S})m}_{\ \ l}(k,\boldsymbol{x}) = j_l(kx)Y_l^m(\theta,\phi)$ が波数 k に対応するモード関数となる．このモード関数は整数 l,m の自由度について縮退している．縮退した自由度については自由に基底を選ぶことができる．どのように選ぶことが自然かは，定曲率空間にとる具体的な座標系による．平坦でない空間には直交座標を張ることができないため，球座標がよく用いられる．

定曲率空間の 3 次元計量は式 (2.8) の線素

$$\gamma_{ij}dx^i dx^j = dx^2 + S_K{}^2(x)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{9.4}$$

で与えられる．任意の関数 Q に対する 3 次元ラプラシアンは，4 次元の式 (1.128) の 3 次元版である

$$\Delta Q = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\partial_i\left(\sqrt{\gamma}\gamma^{ij}\partial_j Q\right) \tag{9.5}$$

で与えられる．したがって，一般化したヘルムホルツ方程式 $(\Delta + k^2)Q = 0$ は，式 (9.4), (9.5) により

$$\frac{1}{S_K{}^2(x)}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(S_K{}^2(x)\frac{\partial Q}{\partial x}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Q}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Q}{\partial\phi^2}\right] + k^2 Q = 0 \tag{9.6}$$

と表される．

例として，スカラー型摂動に対するモード関数 $Q^{(\mathrm{S})}$ を考える*1．変数分離法により，微分方程式 (9.6) の解を動径部分と角度部分に分離すると，角度部分は標準的な球面調和関数 $Y_l^m(\theta,\phi)$ で与えられ，解の形は

$$Q^{(\mathrm{S})} = X_l(k,x)Y_l^m(\theta,\phi) \equiv Q^{(\mathrm{S})m}_{\ \ l}(k;x,\theta,\phi) \tag{9.7}$$

---

*1 ベクトル型やテンソル型も含めたモード関数の具体例は，次の文献に導かれている：K. Tomita, *Prog. Theor. Phys. Letters*, **68**, 310 (1982); L. F. Abbott and R. K. Schaefer, *Astrophys. J.*, **308**, 546 (1986).

となる．式 (9.7) を式 (9.6) へ代入し，式 (B.68), (B.61) を用いると，動径方向の関数 X_l の満たす微分方程式として

$$\frac{d}{dx}\left[S_K{}^2(x)\frac{dX_l}{dx}\right] + \left[k^2 S_K{}^2(x) - l(l+1)\right]X_l = 0 \tag{9.8}$$

が導かれる．平坦空間 $K = 0$ の場合，この方程式は球ベッセル関数の満たす微分方程式 (B.34) に帰着するから，原点で正則な解は $j_l(kx)$ で与えられる．曲率が存在する $K \neq 0$ の場合，方程式 (9.8) は変数変換によって陪ルジャンドル微分方程式に帰着させることができ，その解は陪ルジャンドル関数 $P^\mu_\nu(z)$ から定義される円錐関数 $P^\mu_{-1/2+i\lambda}(z)$ および円環関数 $P^\mu_{-1/2+\lambda}(z)$ を用いて表すことができる*2.

微分方程式 (9.8) は固有値を k^2 とするスツルム-リウビル型微分方程式の形をしていて，対応する重み関数は $S_K{}^2(x)$ である．スツルム-リウビル型微分方程式の一般論により，異なる固有値に対応する解は重み関数のもとで直交完全系をなす．関数 $X_l(k,x)$ を微分方程式の実数解とすれば，重み関数 $S_K{}^2(x)$ のもとでの直交関係

$$\int S_K{}^2(x)\,dx\,X_l(k,x)X_l(k',x) = A_l(k)\,\delta_{\rm D}(k-k') \tag{9.9}$$

を満たす．ただし，積分範囲は平坦か負曲率の場合 $0 < x < \infty$ であるが，正曲率 $K > 0$ の場合は 3 次元空間の有限性により $0 < x < 2\pi K^{-1/2}$ となる．また $A_l(k)$ は X_l の規格化により任意に定められる因子である．一般に関数 $X_l(k,x)$, $A_l(k)$ は曲率 K にも依存する．曲率がゼロの場合に $X_l(k,x) = j_l(kx)$ と選ぶと，球ベッセル関数の直交関係 (B.38) より $A_l(k) = \pi/2k^2$ で与えられる．

上の直交関係と球面調和関数の直交関係 (B.72) を用いると，式 (9.7) のモード関数に対する直交関係は

$$\int S_K{}^2(x)\,dx\,\sin\theta\,d\theta\,d\phi\,Q^{({\rm S})m*}_{l}(k;x,\theta,\phi)\,Q^{({\rm S})m'}_{l'}(k';x,\theta,\phi) = A_l(k)\,\delta_{mm'}\delta_{ll'}\delta_{\rm D}(k-k') \tag{9.10}$$

で与えられる．スツルム-リウビル型方程式の解の完全性により，極座標における

---

*2　本書ではモード関数の具体形を用いることはないが，これらの関数の解の公式を用いて原点で正則な解の具体形を求めると

$$X_l(k,x) = (-1)^l\frac{S_K{}^l(x)}{\sqrt{N_l(k)}}\left(\frac{1}{S_K(x)}\frac{\partial}{\partial x}\right)^l\left(\frac{\sin\tilde{k}x}{S_K(x)}\right)\quad\left[\tilde{k}\equiv\sqrt{k^2+K},\ N_l(k)\equiv\prod_{n=0}^{l}\left[k^2-(n^2-1)K\right]\right]$$

が得られる．正曲率 $K > 0$ のときは 3 次元空間体積の有限性により $K^{-1/2}\tilde{k}$ が $l+1$ 以上の整数となる離散的な波数 k しか許されない．このとき上の関数はゲーゲンバウアー多項式もしくは超球多項式と呼ばれるものになる．

任意のスカラー型摂動 $F^{(\mathrm{S})}(x,\theta,\phi)$ は

$$F^{(\mathrm{S})}(x,\theta,\phi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\int \frac{dk}{A_l(k)} F^{(\mathrm{S})}_{lm}(k)\, Q^{(\mathrm{S})m}_{\ \ l}(k;x,\theta,\phi)$$

と展開できる[*3]．式 (9.10) によりこの逆変換は

$$F^{(\mathrm{S})}_{lm}(k) = \int_0^{\infty} S_K{}^2(x)\,dx \int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} d\phi\, Q^{(\mathrm{S})m*}_{\ \ l}(k;x,\theta,\phi)\, F^{(\mathrm{S})}(x,\theta,\phi) \tag{9.11}$$

で与えられる．これが定曲率空間におけるフーリエ-ベッセル展開の一般化である．曲率ゼロの場合は通常のフーリエ-ベッセル展開に一致する．

線形微分方程式を上のようにモード分解すると，その展開係数の満たす方程式ではラプラシアンが $\Delta \to -k^2$ と置き換わる．さらに方程式は変数の各モードごとに独立なものへ分解してしまう．たとえば，バーディーン変数を用いて表されたスカラー型成分の運動方程式 (7.170)-(7.173) をモード分解すれば，その方程式系は

$$\varDelta' - 3w\mathscr{H}\varDelta = \left(k^2 - 3K\right)\left[(1+w)V - 2\mathscr{H}w\varPi\right] \tag{9.12}$$

$$V' + \mathscr{H}V = -\frac{c_{\mathrm{s}}{}^2}{1+w}\varDelta - \varPhi - \frac{w}{1+w}\left[\varGamma - \frac{2}{3}(k^2-3K)\varPi\right] \tag{9.13}$$

$$\left(k^2 - 3K\right)\varPsi = 4\pi G a^2 \bar{\rho}\varDelta \tag{9.14}$$

$$\varPhi + \varPsi = -8\pi G a^2 \bar{p}\varPi \tag{9.15}$$

と変換される．各変数はモード分解の係数を表し，もはや空間座標の関数ではない．これらの変換された変数は本来，たとえば $\varDelta_{lm}(k,\tau)$, $V_{lm}(k,\tau)$ などと表されるべきである．だが，線形理論では各モードが独立になるため，ゆらぎの発展方程式には 1 つのモードに属する変数だけが現れる．そこで記号の煩雑さを避けるため，モードを区別する添字や引数は省略し，もとの変数と同じ記号でモード展開の係数も表す．この簡略化は，線形近似の特殊性を用いている．非線形結合を考えると異なるモード間にも結合が現れて複雑になり，上のような簡単さは成り立たなくなる．

線形近似とモード分解を適用することによって，ゆらぎの発展方程式に空間微分が含まれなくなるため，その解を求めるには時間変数に関する微分方程式を積分す

---

*3 ただし，正曲率 ($K > 0$) の場合は波数が離散的になるので，積分は k に対する離散的な和であると解釈する．また，負曲率 ($K < 0$) の場合，モード関数を 2 乗可積分にするためには積分範囲が $k > (-K)^{1/2}$ に限られる．

るだけでよい．いくつかの簡単な場合には解析的な解を求めることもできる．以下では，現実の宇宙を単純に表す近似により，ゆらぎの時間発展に関する具体的な解析解を求めてみる．

9.2 単成分系におけるゆらぎの進化

ここではまず，ゆらぎの発展方程式が解析的に扱える簡単な場合として，放射優勢期および物質優勢期とそれ以降におけるゆらぎの進化を考える．この場合，状態方程式パラメータ $w = \bar{p}/\bar{\rho}$ が一定値をとる．このとき，式 (7.63) からわかるように，音速パラメータ ${c_s}^2$ は w に等しい．さらに，これらの優勢期では非等方応力とエントロピーゆらぎの寄与はよい近似で無視できる．これらのことから，この節では

$$w = {c_s}^2, \qquad \Gamma = \Pi = 0 \tag{9.16}$$

となる場合を考える．式 (7.66) によると，上式の第 1 式が成り立つときには，必然的に w が時間的に一定となる．また上式が成り立つとき，式 (7.173) により $\Psi = -\Phi$ となり，バーディーン方程式 (7.175) をモード分解した式は，

$$\Phi'' + 3\mathscr{H}\left(1 + {c_s}^2\right)\Phi' + {c_s}^2 k^2 \Phi + \left[\Lambda a^2\left(1 + {c_s}^2\right) - 2K\left(1 + 3{c_s}^2\right)\right]\Phi = 0 \tag{9.17}$$

となる．さらにこのとき，ポテンシャルからバーディーン変数 Δ と速度場 V を与える式 (7.176), (7.178) をモード分解したものは，

$$\Delta = -\frac{k^2 - 3K}{4\pi G a^2 \bar{\rho}}\Phi, \qquad V = -\frac{(a\Phi)'}{4\pi G a^3 \bar{\rho}(1 + w)} \tag{9.18}$$

で与えられる．

9.2.1 放射優勢期

最初に放射優勢期の宇宙を考える．この場合の状態方程式は $\bar{p} = \bar{\rho}/3$ となり，また宇宙項と曲率項も無視できる．そこで

$$w = {c_s}^2 = \frac{1}{3}, \qquad \Lambda = K = 0 \tag{9.19}$$

とおく．$\Lambda = K = 0$ のとき，

$$4\pi G a^2 \bar{\rho} = \frac{3}{2}\mathscr{H}^2, \qquad 4\pi G a^2 (\bar{\rho} + \bar{p}) = \mathscr{H}^2 - \mathscr{H}' \tag{9.20}$$

が成り立つ．式 (9.19) のもとで式 (7.62) と式 (7.60) を積分し，スケール因子と膨張率，およびその時間変化率を求めれば，

$$a \propto \tau, \quad \mathscr{H} = \frac{1}{\tau}, \quad \mathscr{H}' = -\frac{1}{\tau^2} \tag{9.21}$$

が得られる．ここで時間を過去へ外挿したとき，スケール因子がゼロになる時刻が共形時間の原点 ($\tau = 0$) になる．このため，前章とは異なりつねに $\tau > 0$ である．

式 (9.19), (9.21) をバーディーン方程式 (9.17) へ代入すると，

$$\Phi'' + \frac{4}{\tau}\Phi' + \frac{k^2}{3}\Phi = 0 \tag{9.22}$$

という単純な方程式になる．また，ポテンシャルから密度ゆらぎと速度場を与える式 (9.18) は

$$\varDelta = -\frac{2}{3}k^2\tau^2\Phi, \qquad V = -\frac{\tau}{2}(\tau\Phi)' \tag{9.23}$$

となる．ここで変数変換

$$\tau = \frac{\sqrt{3}}{k}x, \qquad \Phi(\tau) = \frac{F(x)}{x} \tag{9.24}$$

を行うと，微分方程式 (9.22) は

$$x^2\frac{d^2F}{dx^2} + 2x\frac{dF}{dx} + \left(x^2 - 2\right)F = 0 \tag{9.25}$$

と変形される．この方程式は，球ベッセル関数の微分方程式 (B.34) において $l = 1$ としたものに等価である．したがって $F(x)$ に対する一般解は 1 次の第 1 種球ベッセル関数 $j_1(x)$ と第 2 種球ベッセル関数 $n_1(x)$ の重ね合わせとして

$$F(x) = A_+ j_1(x) + A_- n_1(x) \tag{9.26}$$

で与えられる．ただし $A_\pm$ は積分定数である．

上に現れた 1 次の球ベッセル関数は，具体的に三角関数で与えられ，

$$j_1(x) = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}, \qquad n_1(x) = -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x} \tag{9.27}$$

となる．これらの関数は $x \ll 1$ のとき漸近的に $j_1(x) \simeq x/3$, $n_1(x) \simeq -x^{-2}$ と振る舞うので，式 (9.26) は

$$F(x) \simeq \frac{A_+ x}{3} - \frac{A_-}{x^2} \qquad (x \ll 1) \tag{9.28}$$

という漸近形を持つ．いま，ハッブル半径は $\mathscr{H}^{-1} = \tau$ で与えられるから，上の近

似 $x \ll 1$ は $k \ll \mathscr{H}$ を意味し，ゆらぎの波長が超ハッブル・スケールにある時期の振る舞いを与える．ハッブル半径は時間とともに大きくなるので，宇宙の十分初期に時間を遡れば，現在興味あるスケールの波長は，ほとんどがハッブル半径を超えている．時間が経過するとともに，短い波長のゆらぎから順にハッブル半径を交差して中に入ってくる．式 (9.28) の近似は，ゆらぎがまだハッブル半径の外にある早い時期におけるゆらぎの成長を表している．

ここで式 (9.28) の右辺第 2 項は時間とともに小さくなる減衰解に対応する．初期宇宙のゆらぎは十分に小さいから，$x \ll 1$ において $\Phi = F/x$ が十分に小さいという条件により，$A_+ \gg A_-$ でなければならない．したがって，ゆらぎが超ホライズン・スケールで時間発展すると，減衰解は非常に小さくなる．その後ゆらぎがホライズン半径に入った後でも，一般の場合の式 (9.26) において第 2 項は無視できるほど小さい．そこで第 1 項だけを残して減衰解を無視する．これを変数 Φ で表せば，すべてのスケールを含む解として

$$\Phi = \frac{9\Phi_\mathrm{i}}{k^2\tau^2}\left(\frac{\sqrt{3}}{k\tau}\sin\frac{k\tau}{\sqrt{3}} - \cos\frac{k\tau}{\sqrt{3}}\right) \tag{9.29}$$

が得られる．ここで積分定数を $\Phi_\mathrm{i} = A_+/3$ と書き換えた．この解を式 (9.23) へ代入すると，

$$\Delta = -6\Phi_\mathrm{i}\left(\frac{\sqrt{3}}{k\tau}\sin\frac{k\tau}{\sqrt{3}} - \cos\frac{k\tau}{\sqrt{3}}\right) \tag{9.30}$$

$$V = \frac{9\sqrt{3}\Phi_\mathrm{i}}{k^3\tau^2}\left[\left(1 - \frac{k^2\tau^2}{6}\right)\sin\frac{k\tau}{\sqrt{3}} - \frac{k\tau}{\sqrt{3}}\cos\frac{k\tau}{\sqrt{3}}\right] \tag{9.31}$$

が得られる．これらの関数は，図 9.1 に示すように変化する．

長波長極限 $k\tau \ll 1$ において式 (9.29) は $\Phi = \Phi_\mathrm{i}$ となる．すなわち，重力ポテンシャルに対応するゲージ不変量 Φ は超ホライズン・スケールにおいて時間的に一定である．ただし，いま波数 k を固定して微分方程式を解いたので，積分定数である Φ_i は波数依存性を持ち k の関数である，その関数形 $\Phi_\mathrm{i}(k)$ はゆらぎの初期条件によって定められる．同様に式 (9.30), (9.31) の長波長極限をとることにより，超ホライズン・スケールのゆらぎの漸近形は

$$\Phi \simeq \Phi_\mathrm{i}, \quad \Delta \simeq -\frac{2}{3}\Phi_\mathrm{i}k^2\tau^2, \quad V \simeq -\frac{\Phi_\mathrm{i}}{2}\tau \qquad (k\tau \ll 1) \tag{9.32}$$

で与えられる．ここで $\tau \propto a$ であるから，放射優勢期においてバーディーン変数 Δ は超ハッブル・スケールでスケール因子 a の 2 乗に比例して成長し，また速度場

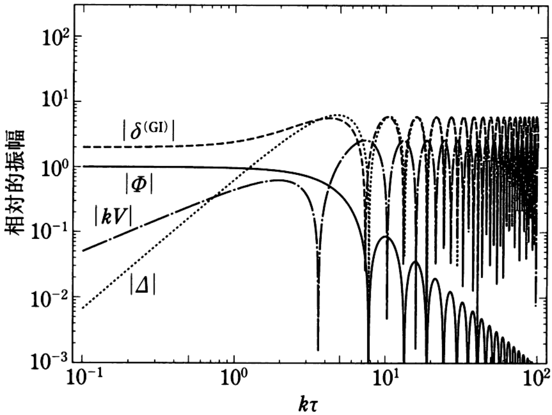


図 9.1 単成分近似による，放射優勢期のゆらぎの時間発展．振幅は Φ_{i} で規格化してある．

V はスケール因子に比例して成長する．

一方，ハッブル半径よりも短い波長に着目して短波長極限 $k\tau \gg 1$ をとると，式 (9.29)–(9.31) は

$$\Phi = -\frac{9\Phi_{\mathrm{i}}}{k^2\tau^2}\cos\frac{k\tau}{\sqrt{3}}, \quad \Delta = 6\Phi_{\mathrm{i}}\cos\frac{k\tau}{\sqrt{3}}, \quad V = -\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{\Phi_{\mathrm{i}}}{k}\sin\frac{k\tau}{\sqrt{3}} \qquad (k\tau \gg 1) \tag{9.33}$$

となり，漸近的に振動関数となる．放射優勢期にハッブル半径より短い波長のゆらぎが振動する理由は，放射の圧力によりゆらぎの成長が妨げられ，ゆらぎが波動として伝播するためである．波長が短くなればなるほど，より速く振動する．ポテンシャル Φ は振幅が減衰しながら振動し，バーディーン変数 Δ は一定の振幅で振動する．また，速度場は振幅が一定の振動をし，その振動位相は密度ゆらぎの振動に比べて 90° だけずれる．

ゲージ不変量であるバーディーン変数 Δ は共動ゲージの密度ゆらぎに対応するものであったが，ここで共形ニュートン・ゲージの密度ゆらぎに対応するゲージ不変量 $\delta^{(\mathrm{GI})}$ の振る舞いも調べてみる．この量はバーディーン変数により式 (7.179) で与えられる．ここで考えている放射優勢期では式 (9.19), (9.21) を使うことで

$$\delta^{(\mathrm{GI})} = \Delta + \frac{4}{\tau}V \tag{9.34}$$

となり，さらに式 (9.30), (9.31) を代入すると

$$\delta^{(\mathrm{GI})} = \frac{36\Phi_\mathrm{i}}{k^2\tau^2}\left[\left(1-\frac{k^2\tau^2}{3}\right)\frac{\sqrt{3}}{k\tau}\sin\frac{k\tau}{\sqrt{3}}-\left(1-\frac{k^2\tau^2}{6}\right)\cos\frac{k\tau}{\sqrt{3}}\right] \tag{9.35}$$

が得られる．この関数は図 9.1 に示されている．上式において長波長極限 $k\tau \ll 1$ をとれば，

$$\delta^{(\mathrm{GI})} \simeq -2\Phi_\mathrm{i} \qquad (k\tau \ll 1) \tag{9.36}$$

となる．すなわち，このゲージ不変量の漸近形は一定値に近づく．この振る舞いは τ^2 に比例して成長するバーディーン変数 Δ の振る舞いとは対照的である．密度ゆらぎは，超ホライズン・スケールにおいて強くゲージ依存する量であるため，ゲージ不変量によって密度ゆらぎに対応する量を定義したとしても，その振る舞いは定義によって大きく異なる．これはその典型的な例となっている．

一方で，式 (9.35) の短波長極限 $k\tau \gg 1$ をとれば，

$$\delta^{(\mathrm{GI})} \simeq 6\Phi_\mathrm{i}\cos\frac{k\tau}{\sqrt{3}} \qquad (k\tau \gg 1) \tag{9.37}$$

となる．これは式 (9.33) で求めたバーディーン変数 Δ の漸近形と一致している．ハッブル半径よりも短い波長では，密度ゆらぎもゲージ依存しない概念となる．

9.2.2 物質優勢期

次に，物質優勢期の宇宙におけるゆらぎの進化を調べる．非相対論的物質の圧力はエネルギー密度に比べて十分小さいため，状態方程式パラメータはよい近似で $w = 0$ となる．物質成分は無衝突粒子であるとし，自分自身や他の成分との間に直接の相互作用は働かないものとする．現在の宇宙における物質の主要成分であるダークマターはこの性質を持つ．物質優勢期では，宇宙項と曲率項が無視できる．そこで

$$w = {c_\mathrm{s}}^2 = 0, \qquad \Lambda = K = 0 \tag{9.38}$$

とおく．式 (9.38) のもとで式 (7.62) と式 (7.60) を積分し，スケール因子と膨張率およびその時間変化を求めると

$$a \propto \tau^2, \qquad \mathcal{H} = \frac{2}{\tau}, \qquad \mathcal{H}' = -\frac{2}{\tau^2} \tag{9.39}$$

が得られる．式 (9.38), (9.39) をバーディーン方程式 (9.17) へ代入すると

$$\Phi'' + \frac{6}{\tau}\Phi' = 0 \tag{9.40}$$

が得られる．物質優勢期も $\Lambda = K = 0$ となるので，式 (9.20) が成り立つ．このとき，ポテンシャルから密度ゆらぎと速度場を与える式 (9.18) は

$$\Delta = -\frac{1}{6}k^2\tau^2\Phi, \qquad V = -\frac{1}{6}\left(\tau^2\Phi\right)' \tag{9.41}$$

の形になる．

発展方程式 (9.40) はべき乗の形の解 $\Phi \propto \tau^n$ を探せば容易に解くことができ $n = 0, -5$ を得る．ここで $n = -5$ は減衰解に対応するから，$n = 0$ すなわち Φ が時間的に一定となる解が減衰せずに残される．この一定値を Φ_{m} とおく．この解と式 (9.41) により，減衰解を除いたゆらぎの時間変化は

$$\Phi = \Phi_{\mathrm{m}}, \qquad \Delta = -\frac{\Phi_{\mathrm{m}}}{6}k^2\tau^2, \qquad V = -\frac{\Phi_{\mathrm{m}}}{3}\tau \tag{9.42}$$

で与えられる．これらの表式は，波長がハッブル半径を超えているかどうかによらず成り立つ．いま $a \propto \tau^2$ であるから，密度ゆらぎに対応するバーディーン変数 Δ はスケール因子に比例して成長する．放射優勢期とは異なり，ハッブル半径内でも圧力によってゆらぎが抑制されることがないから，すべての波長でゆらぎが成長できるのである．

ここでもゲージ不変量 $\delta^{(\mathrm{GI})}$ を求めると，式 (9.39), (9.42) を式 (7.179) に代入することにより，

$$\delta^{(\mathrm{GI})} = -2\Phi_{\mathrm{m}}\left(1 + \frac{k^2\tau^2}{12}\right) \tag{9.43}$$

が得られる．このゲージ不変量も，ハッブル半径内の短波長極限 $k\tau \gg 1$ では漸近的に Δ と一致する．長波長極限 $k\tau \ll 1$ では一定値に近づき，

$$\delta^{(\mathrm{GI})} \simeq -2\Phi_{\mathrm{m}} \qquad (k\tau \ll 1) \tag{9.44}$$

となる．ここでも超ハッブル・スケールにおける密度ゆらぎにはゲージ依存性が現れ，バーディーン変数 Δ がスケール因子に比例して成長するのに対し，共形ニュートン・ゲージの密度ゆらぎに対応する上のゲージ不変量は成長せず，定性的にまったく異なる振る舞いをする．

ここで，放射優勢期におけるポテンシャルの一定値 Φ_{i} と物質優勢期における一定値 Φ_{m} は同じ値ではない．その関係を簡単に求めるには，超ハッブル・スケールにおける曲率ゆらぎを考えるとよい．式 (7.231) で見たように，曲率 K とエン

トロピーゆらぎ Γ が無視できるとき，超ハッブル・スケール $k/\mathscr{H} \ll 1$ において曲率ゆらぎ ζ は時間的に変化しない保存量となる．上で用いている近似では，この条件が満たされている．いま非等方応力 Π を無視しているので $\Psi = -\Phi$ となり，このとき式 (7.223) により曲率ゆらぎは $\zeta = -\Phi + \mathscr{H}V$ で与えられる．放射優勢期では式 (9.21), (9.32) により超ハッブル・スケールにおける曲率ゆらぎの漸近形は $\zeta = -3\Phi_{\mathrm{i}}/2$ と求められる．一方，物質優勢期では式 (9.39), (9.42) により $\zeta = -5\Phi_{\mathrm{m}}/3$ となる．両者が等しくなる条件より，

$$\Phi_{\mathrm{m}} = \frac{9}{10}\Phi_{\mathrm{i}} \tag{9.45}$$

が導かれる．どちらの優勢期でも超ハッブル・スケールのポテンシャル Φ は時間的に一定であるが，放射優勢期から物質優勢期へ移行する等密度時の前後で値が変化し，波長ごとに振幅が 10% ずつ減少する．

9.2.3 物質優勢期以降

物質優勢期以降で，宇宙項や曲率項の効果も含めた一般の場合を考える．すなわち，物質成分の状態方程式に対して

$$w = {c_{\mathrm{s}}}^2 = 0 \tag{9.46}$$

を仮定し，また Λ, K は一般にゼロでないとする．現在時刻 t_0 における物質のエネルギー密度を $\bar{\rho}_0$ とすると，上の式と，式 (7.62) の積分により，

$$\bar{\rho} = \frac{\bar{\rho}_0}{a^3}, \qquad \bar{p} = 0 \tag{9.47}$$

となる．ただし $\bar{\rho}_0$ には宇宙項の持つエネルギー密度の寄与を含まない．このとき，バーディーン方程式 (9.17) は

$$\Phi'' + 3\mathscr{H}\Phi' + \left(\Lambda a^2 - 2K\right)\Phi = 0 \tag{9.48}$$

となる．また，密度ゆらぎと速度場を与える式 (7.176), (7.178) は

$$\Delta = -\frac{k^2 - 3K}{4\pi G\bar{\rho}_0} a\Phi, \qquad V = -\frac{(a\Phi)'}{4\pi G\bar{\rho}_0} \tag{9.49}$$

となる．

次に，方程式 (9.48) の解を求める．ここで，式 (9.46), (9.47) を，膨張率に関する一般的な式 (7.60), (7.61), (7.67) に代入すると，

$$\mathscr{H}^2 = \frac{8\pi G\bar{\rho}_0}{3a} + \frac{\Lambda}{3}a^2 - K, \quad \mathscr{H}' = -\frac{4\pi G\bar{\rho}_0}{3a} + \frac{\Lambda}{3}a^2, \quad \frac{\mathscr{H}''}{\mathscr{H}} = \frac{4\pi G\bar{\rho}_0}{3a} + \frac{2}{3}\Lambda a^2 \tag{9.50}$$

が得られる．これらの関係式を用いると，

$$\Phi \propto \frac{\mathscr{H}}{a^2} \tag{9.51}$$

が式 (9.48) の特解になっていることが確かめられる．物質優勢期において宇宙項や曲率がまだ効かずに式 (9.39) が成り立つとき，この特解は $a^{-5/2}$ に比例するので，減衰解に対応することがわかる．

そこで減衰しないもう 1 つの独立解を求めるため，時間変化に関する未知関数 $G(\tau)$ を使って

$$\Phi = \frac{\mathscr{H}}{a^2}G \tag{9.52}$$

とおく．これを式 (9.48) へ代入すると，

$$\mathscr{H}G'' + \left(2\mathscr{H}' - \mathscr{H}^2\right)G' = 0 \tag{9.53}$$

という微分方程式が得られる．これは G' に対する 1 階微分方程式となっている．ここで再び式 (9.50) を用いると，

$$\left(\frac{a}{\mathscr{H}^2}\right)' = \frac{a}{\mathscr{H}^3}\left(\mathscr{H}^2 - 2\mathscr{H}'\right) \tag{9.54}$$

となることから，式 (9.53) の一般解は $G' \propto a/\mathscr{H}^2$ であることがわかる．この解を積分することで，

$$G = B_+\int_0^\tau \frac{a\,d\tau}{\mathscr{H}^2} + B_- \tag{9.55}$$

が得られる．ただし $B_\pm$ は時間に依存しない積分定数である．右辺第 2 項は減衰解 (9.51) に対応する．物質優勢期の極限では，式 (9.39) により $\mathscr{H}^{-2} \propto \tau^2$ であるから，第 1 項は時間とともに成長する．物質優勢期に成長しない解は物質優勢期以後に無視できるようになるので，式 (9.55) を式 (9.52) へ代入したものから物質優勢期の減衰解を落とせば，

$$\Phi = B_+\frac{\mathscr{H}}{a^2}\int_0^a \frac{da}{\mathscr{H}^3} \tag{9.56}$$

が得られる．ただし $a\,d\tau = da/\mathscr{H}$ を用いて積分変数を変換した．

物質優勢期の極限では式 (9.39) が成り立つため，式 (9.56) は時間的に変化しな

いことがわかる．このときには，式 (9.50) 第 1 式において右辺第 1 項が支配的になるので $\mathscr{H} = (8\pi G\bar{\rho}_0/3a)^{1/2}$ が成り立ち，積分の部分は漸近的に

$$\mathscr{H}\int_0^a \frac{da}{\mathscr{H}^3} \to \frac{3a^2}{20\pi G\bar{\rho}_0} \qquad \text{(物質優勢期)} \tag{9.57}$$

となる．物質優勢期におけるこの関係を式 (9.56) へ代入すると，物質優勢期におけるポテンシャルの値 Φ_m によって積分定数 B_+ を表すことができ，

$$B_+ = \frac{20\pi G\bar{\rho}_0}{3}\Phi_\mathrm{m} \tag{9.58}$$

を得る．

式 (9.49) 第 1 式へ式 (9.56) を代入して式 (9.58) を用いると，密度ゆらぎに対応するバーディーン変数の成長解として

$$\Delta = -\frac{5}{3}\left(k^2 - 3K\right)\Phi_\mathrm{m}\frac{\mathscr{H}}{a}\int_0^a \frac{da}{\mathscr{H}^3} \tag{9.59}$$

が得られる．この式における時間変化を表す関数として

$$D_+(\tau) \equiv \frac{20\pi G\bar{\rho}_0}{3}\frac{\mathscr{H}}{a}\int_0^a \frac{da}{\mathscr{H}^3} \tag{9.60}$$

を定義する．この関数 D_+ は密度ゆらぎの**線形成長因子** (linear growth factor) と呼ばれ，物質優勢期以後の線形成長解に対する時間変化を与える．式 (9.57) により，物質優勢期の極限で

$$D_+(\tau) \to a(\tau) \qquad \text{(物質優勢期)} \tag{9.61}$$

となるように規格化されている．式 (9.57) を式 (9.56) へ代入し，積分の部分を成長因子 D_+ により表せば，

$$\Phi = \frac{D_+}{a}\Phi_\mathrm{m} \tag{9.62}$$

という簡潔な形になる．この結果を式 (9.49) へ代入すると，

$$\Delta = -\frac{k^2 - 3K}{4\pi G\bar{\rho}_0}D_+\Phi_\mathrm{m}, \quad V = -\frac{\mathscr{H}D_+f_+\Phi_\mathrm{m}}{4\pi G\bar{\rho}_0} \tag{9.63}$$

が得られる．ただし，

$$f_+(\tau) \equiv \frac{d\ln D_+}{d\ln a} = \frac{D'_+}{\mathscr{H}D_+} \tag{9.64}$$

と定義した．この関数 f_+ を密度ゆらぎの**線形成長率** (linear growth rate) という．物質優勢期の極限では，上の定義式と式 (9.61) から明らかなように，

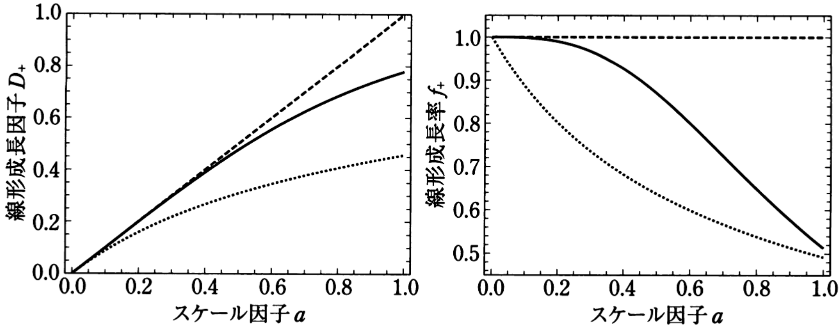


図 9.2 左図：線形成長因子．右図：線形成長率．宇宙論パラメータの値 $(\Omega_{\rm m0}, \Omega_{\Lambda 0})$ の異なる 3 つの場合が示されていて，(0.3, 0.7) が実線，(1, 0) が破線，(0.3, 0) が点線にそれぞれ対応する．

$$f_+(\tau) \to 1 \qquad\qquad (物質優勢期) \tag{9.65}$$

が成り立つ．

式 (2.67), (2.71), (2.72) のそれぞれ第 1 式に導入された時間依存する密度パラメータを用いると，式 (9.60), (9.64) は

$$D_+ = \frac{5}{2} a \Omega_{\rm m} \int_0^1 \frac{dx}{(\Omega_{\rm m}/x + \Omega_\Lambda x^2 + \Omega_{\rm K})^{3/2}} \tag{9.66}$$

$$f_+ = -1 - \frac{\Omega_{\rm m}}{2} + \Omega_\Lambda + \left[\int_0^1 \frac{dx}{(\Omega_{\rm m}/x + \Omega_\Lambda x^2 + \Omega_{\rm K})^{3/2}}\right]^{-1} \tag{9.67}$$

と変形できる．ただし $\Omega_{\rm m}$ は非相対論的な物質成分に対する時間依存する密度パラメータであり，また $\Omega_{\rm m} + \Omega_\Lambda + \Omega_{\rm K} = 1$ を満たす．時間依存するパラメータ $\Omega_{\rm m}$, Ω_Λ, $\Omega_{\rm K}$ と，現在値のパラメータ $\Omega_{\rm m0}$, $\Omega_{\Lambda 0}$, $\Omega_{\rm K0}$ の関係は

$$(\Omega_{\rm m}, \Omega_\Lambda, \Omega_{\rm K}) = \frac{\left(\Omega_{\rm m0}, \Omega_{\Lambda 0} a^3, \Omega_{\rm K0} a\right)}{\Omega_{\rm m0} + \Omega_{\Lambda 0}\, a^3 + \Omega_{\rm K0}\, a} \tag{9.68}$$

で与えられる．現在値のパラメータが与えられれば，この関係を式 (9.66), (9.67) に代入して数値積分することにより，線形成長因子 D_+ と線形成長率 f_+ がスケール因子 a の関数として容易に求まる．いくつかの宇宙論パラメータの場合，その結果は図 9.2 に与えられるようになる．アインシュタイン-ド・ジッター宇宙の場合 $D_+ = a$, $f_+ = 1$ となるが，物質密度が小さいほど成長因子と成長率のどちらも小さくなる．物質密度が同じであれば，正の宇宙項を持つ方が宇宙年齢が長くな

り，宇宙項のない場合に比べて成長因子と成長率は大きくなる．

9.3 二成分系におけるゆらぎの進化

前節における簡単な単成分系では，エネルギー優勢成分が複数種類となるような時期を扱うことができない．たとえば，放射優勢期から物質優勢期へ移り変わる等密度時前後のゆらぎの進化を記述できない．このような時期を近似的に調べるため，この節では 2 つの成分が存在する場合を考え，簡単な近似に基づいて解析的な解を導出する*4．さらに，この考察を放射と物質の共存系に応用して，実際の宇宙での等密度時前後におけるゆらぎの時間進化を調べる．

9.3.1 発展方程式

2 成分系の簡単な近似として，2 つのエネルギー成分の間には直接の相互作用が働かないものとする．これは 7.5.3 項において考えた状況と同じであり，そこで得られた結果を用いることができる．さらに，各成分ごとのエントロピーゆらぎと非等方応力は無視できるものと近似する．また，宇宙項や曲率項の効かない物質優勢期以前を考える．すなわち，

$$\Lambda = K = 0 \tag{9.69}$$

となるアインシュタイン-ド・ジッター宇宙を仮定する．このときフリードマン方程式 (7.60) から

$$\mathscr{H}^2 = \frac{8\pi G}{3} a^2 \bar{\rho} \tag{9.70}$$

が成り立つ．

以下では，考えている 2 つのエネルギー成分を a, b という添字で表し，任意ゲージにおける各成分の密度ゆらぎを δ_a, δ_b とする．各成分ごとのエントロピーゆらぎと非等方応力がないと仮定したので，

$$\Gamma_a = \Gamma_b = 0, \quad \Pi_a = \Pi_b = 0 \tag{9.71}$$

となる．非等方応力については，式 (7.263) によって各成分の寄与の和が系全体の

---

*4　この節における解析的な結果の多くは次の文献に見られる: H. Kodama and M. Sasaki, *Prog. Theor. Phys. Supplement*, **78**, 1 (1984); H. Kodama and M. Sasaki, *Int. J. Mod. Phys.*, **A1**, 265 (1986).

値を与えるから，$\Pi = 0$ となる．ところが，式 (7.284) に示されたように，音速の異なる成分が共存するとき，各成分のエントロピーゆらぎがなかったとしても，系全体のエントロピーゆらぎは一般に存在する．式 (7.285) に導入した変数

$$S_{ab} = \frac{\delta_a}{1+w_a} - \frac{\delta_b}{1+w_b} \tag{9.72}$$

により，式 (7.284) に与えられる全エントロピーゆらぎは，2 成分系の場合

$$\Gamma = \frac{\bar{\rho}_a\bar{\rho}_b\,(1+w_a)\,(1+w_b)}{\bar{\rho}^2 w(1+w)}\left(c_a{}^2 - c_b{}^2\right) S_{ab} \tag{9.73}$$

となる．すなわち，変数 S_{ab} は時間依存する係数を除いてエントロピーゆらぎ Γ に比例する．エントロピーゆらぎはゲージ不変量であるから，変数 S_{ab} もゲージ不変量である．以下ではこの量 S_{ab} をエントロピー摂動と呼ぶことにする．ただし，式 (9.72) の形で定義される S_{ab} がゲージ不変であるという性質は，成分間に直接の相互作用がない場合に限られる．

各成分の密度ゆらぎを独立な自由度として扱う代わりに，全成分のバーディーン変数 $\varDelta$ とエントロピー摂動 S_{ab} を独立なゆらぎの自由度として扱うことにし，これらの変数に対する発展方程式を導くことにする．いま考えている状況において，バーディーン変数 $\varDelta$ の発展方程式 (7.181) をモード分解した式は，

$$\varDelta'' + \mathscr{H}\left(1 - 6w + 3c_s{}^2\right)\varDelta' + c_s{}^2k^2\varDelta - \frac{3}{2}\mathscr{H}^2\left(1 + 8w - 3w^2 - 6c_s{}^2\right)\varDelta = -k^2 w\Gamma \tag{9.74}$$

という形になる．ただし式 (9.69), (9.70) を用いた．また全成分に対する式 (7.176), (7.178) はいまの場合

$$\varDelta = -\frac{2}{3}\frac{k^2}{\mathscr{H}^2}\Phi, \qquad V = -\frac{2}{3}\frac{\Phi' + \mathscr{H}\Phi}{\mathscr{H}^2(1+w)} \tag{9.75}$$

という関係になる．

エントロピー摂動 S_{ab} の進化は式 (7.286), (7.290) を組み合わせて記述される．いまの場合それらは

$$S_{ab}{}' = k^2 V_{ab} \tag{9.76}$$

$$V_{ab}{}' + \left(1 - 3c_{ab}{}^2\right)\mathscr{H}V_{ab} = -\,c_{ab}{}^2 S_{ab} - \frac{c_a{}^2 - c_b{}^2}{1+w}\varDelta \tag{9.77}$$

で与えられる．ただし，重み付きの平均音速

$$c_{ab}{}^2 \equiv \frac{\bar{\rho}_b\,(1+w_b)\,c_a{}^2 + \bar{\rho}_a\,(1+w_a)\,c_b{}^2}{\bar{\rho}(1+w)} \tag{9.78}$$

を定義して用いた．上式で重み係数と音速の成分が逆になっていることに注意する．式 (9.76), (9.77) から V_{ab} を消去すると，エントロピー摂動の発展方程式として

$$S_{ab}{}'' + \left(1 - 3c_{ab}{}^2\right)\mathscr{H} S_{ab}{}' + k^2 c_{ab}{}^2 S_{ab} = -k^2 \frac{c_a{}^2 - c_b{}^2}{1+w}\varDelta \tag{9.79}$$

が得られる．

発展方程式 (9.74), (9.79) を連立させると，全密度ゆらぎ $\varDelta$ とエントロピー摂動 S_{ab} に対する閉じた発展方程式になっている．一般にこれら 2 つの変数は結合していて，その成長は独立でない．だが，どちらの方程式においても，結合を表す右辺には k^2 がかかっているので，長波長極限 $k \to 0$ においては，事実上これらの変数の時間発展が結合しない．

いま考えている 2 成分系において，全密度ゆらぎとエントロピー摂動が与えられれば，各成分の密度ゆらぎが一意的に定まる．そこで各成分のゲージ不変な密度ゆらぎを表す量として，式 (7.267) のように定義される $\varDelta_a^{(c)}$ を用いると，全密度ゆらぎを表すバーディーン変数 $\varDelta$ は式 (7.269) の和で与えられる．さらに式 (9.72) はゲージ不変量であったから，共動ゲージでの密度ゆらぎに対応するゲージ不変量である $\varDelta_a^{(c)}$ を δ_a に代入しても値は変わらない．これらのことから，

$$\varDelta = \frac{\bar{\rho}_a \varDelta_a^{(c)} + \bar{\rho}_b \varDelta_b^{(c)}}{\bar{\rho}}, \qquad S_{ab} = \frac{\varDelta_a^{(c)}}{1+w_a} - \frac{\varDelta_b^{(c)}}{1+w_b} \tag{9.80}$$

が成り立つ．この式を逆に解けば

$$\varDelta_a^{(c)} = \frac{1+w_a}{1+w}\left[\varDelta + \frac{\bar{\rho}_b\,(1+w_b)}{\bar{\rho}} S_{ab}\right], \quad \varDelta_b^{(c)} = \frac{1+w_b}{1+w}\left[\varDelta - \frac{\bar{\rho}_a\,(1+w_a)}{\bar{\rho}} S_{ab}\right] \tag{9.81}$$

が得られる．

現実の宇宙への応用として，物質成分と放射成分の混在する系を考える．物質成分は非相対論的物質であり，放射成分との直接の相互作用は無視できるとする．この物質成分は，現実の宇宙における主要な物質成分のコールド・ダークマターに対応する．バリオン成分は放射と直接の相互作用をするが，コールド・ダークマターの方が支配的な成分である．このため，近似的にバリオン成分の相互作用を無視する．

ここで，スケール因子を等密度時 $\tau_{\rm eq}$ における値 $a_{\rm eq} = a(\tau_{\rm eq})$ で規格化した変数

$$y \equiv \frac{a(\tau)}{a_{\rm eq}} \tag{9.82}$$

を時間変数 τ の代わりに用いると便利である．この変数で $y=1$ となる時刻が等密度時であり，そのときの全密度を $\bar{\rho}(\tau_{\rm eq})=\bar{\rho}_{\rm eq}$ とする．放射と物質のエネルギー密度をそれぞれ $\bar{\rho}_{\rm m}, \bar{\rho}_{\rm r}$ とすると，等密度時における値は $\bar{\rho}_{\rm m}(\tau_{\rm eq})=\bar{\rho}_{\rm r}(\tau_{\rm eq})=\bar{\rho}_{\rm eq}/2$ で与えられる．

放射と物質のエネルギー密度はそれぞれ a^{-3}, a^{-4} に比例し，またそれぞれの圧力は $\bar{p}_{\rm r}=\bar{\rho}_{\rm r}/3, \bar{p}_{\rm m}=0$ で与えられるので，

$$\bar{\rho}_{\rm m}=\frac{\bar{\rho}_{\rm eq}}{2y^3}, \qquad \bar{p}_{\rm m}=0, \qquad \bar{\rho}_{\rm r}=\frac{\bar{\rho}_{\rm eq}}{2y^4}, \qquad \bar{p}_{\rm r}=\frac{\bar{\rho}_{\rm eq}}{6y^4} \tag{9.83}$$

が成り立つ．これらの変数と同様に，以下では物理量の右下につける記号 m, r によってそれぞれ物質成分と放射成分を表す．そして，これまで述べてきた一般論における成分 a, b をそれぞれ $a \to {\rm m}, b \to {\rm r}$ と置き換える．式 (9.83) を用いると，各成分の状態方程式パラメータと音速パラメータは

$$w_{\rm m}={c_{\rm m}}^2=0, \qquad w_{\rm r}={c_{\rm r}}^2=\frac{1}{3} \tag{9.84}$$

で与えられ，さらに全成分に対する物理量は

$$\bar{\rho}=\frac{y+1}{2y^4}\bar{\rho}_{\rm eq}, \qquad \bar{p}=\frac{\bar{\rho}_{\rm eq}}{6y^4}, \qquad w=\frac{1}{3(y+1)}, \qquad {c_{\rm s}}^2=\frac{4}{3(3y+4)} \tag{9.85}$$

と求められる．以上の式により，式 (9.78) で定義される重み付き平均音速は

$${c_{\rm mr}}^2=\frac{y}{3y+4} \tag{9.86}$$

となる．また，膨張率 $\mathscr{H}$ の等密度時における値を $\mathscr{H}_{\rm eq}$ とするとき，式 (2.154) に与えられた等密度時のハッブル半径に対応する波数は $k_{\rm eq}=\mathscr{H}_{\rm eq}$ である．式 (9.70) において，任意の時刻の値と等密度時の値の比をとることにより，

$$\mathscr{H}=\frac{k_{\rm eq}}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{y+1}}{y} \tag{9.87}$$

が得られる．

以下では，放射成分と物質成分からなる 2 成分系のエントロピー摂動 $S_{\rm mr}$ を簡略化して S と表す．共動ゲージにおける各成分の密度ゆらぎを表すゲージ不変量の組 $(\varDelta_{\rm m}^{\rm (c)}, \varDelta_{\rm r}^{\rm (c)})$ と，変数の組 $(\varDelta, S)$ との関係は，式 (9.80)–(9.85) により，

$$\varDelta = \frac{y\varDelta_{\mathrm{m}}^{(\mathrm{c})} + \varDelta_{\mathrm{r}}^{(\mathrm{c})}}{y+1}, \qquad S = \varDelta_{\mathrm{m}}^{(\mathrm{c})} - \frac{3}{4}\varDelta_{\mathrm{r}}^{(\mathrm{c})} \tag{9.88}$$

$$\varDelta_{\mathrm{m}}^{(\mathrm{c})} = \frac{3(y+1)\varDelta + 4S}{3y+4}, \qquad \varDelta_{\mathrm{r}}^{(\mathrm{c})} = \frac{4(y+1)\varDelta - 4yS}{3y+4} \tag{9.89}$$

である．さらに式 (9.73) で与えられる全エントロピーゆらぎは

$$\varGamma = -\frac{4y}{3y+4}S \tag{9.90}$$

となる．

エントロピー摂動 S は，物質を構成する粒子の数密度 n とエントロピー密度 s の比に対する空間的なゆらぎに対応する．実際，この宇宙では光子数が非常に大きくエントロピーのほとんどが放射によって担われているため，式 (2.133) で与えられるように，$s \propto T^3 \propto {\rho_{\mathrm{r}}}^{3/4}$ という比例関係がある．したがって $\delta s/s = (3/4)\delta\rho_{\mathrm{r}}/\rho_{\mathrm{r}} = (3/4)\delta_{\mathrm{r}}$ が成り立つ．また物質の数密度については $n \propto \rho_{\mathrm{m}}$ であるから，$\delta n/n = \delta\rho_{\mathrm{m}}/\rho_{\mathrm{m}} = \delta_{\mathrm{m}}$ となる．したがって，

$$\frac{\delta(n/s)}{n/s} = \frac{\delta n}{n} - \frac{\delta s}{s} = \delta_{\mathrm{m}} - \frac{3}{4}\delta_{\mathrm{r}} \tag{9.91}$$

が成り立つ．式 (9.88) 第 2 式により，この量はゲージ不変量のエントロピー摂動 S に等しい．

式 (9.87) を用いると，共形時間に関する微分について

$$\frac{1}{\mathscr{H}}\frac{d}{d\tau} = y\frac{d}{dy}, \quad \frac{1}{\mathscr{H}^2}\frac{d^2}{d\tau^2} = y^2\frac{d^2}{dy^2} + \frac{y^2}{2(y+1)}\frac{d}{dy} \tag{9.92}$$

が成り立つ．また，波数 k を等密度時のスケール k_{eq} で規格化した変数

$$\omega \equiv \frac{k}{k_{\mathrm{eq}}} \tag{9.93}$$

を定義すると，

$$\frac{k^2}{\mathscr{H}^2} = \frac{2y^2\omega^2}{y+1} \tag{9.94}$$

が成り立つ．さらに式 (9.75) へ式 (9.85), (9.87), (9.92) を代入すると，

$$\varDelta = -\frac{4\omega^2}{3}\frac{y^2}{y+1}\varPhi, \qquad V = -\frac{2\sqrt{2}}{k_{\mathrm{eq}}}\frac{y\sqrt{y+1}}{3y+4}\left(y\frac{d\varPhi}{dy} + \varPhi\right) \tag{9.95}$$

が得られる．

以上に定義した変数や演算子を用いて，放射成分と物質成分の共存系に対する発

展方程式 (9.74), (9.79) を書き表せば,

$$\frac{d^2\varDelta}{dy^2}+\frac{9y+14}{2(y+1)(3y+4)}\frac{d\varDelta}{dy}-\frac{9y^3+30y^2+38y+16}{2y^2(y+1)^2(3y+4)}\varDelta=-\frac{8\omega^2}{3}\frac{(y+1)\varDelta-yS}{(y+1)^2(3y+4)} \tag{9.96}$$

$$\frac{d^2S}{dy^2}+\left[\frac{1}{y}+\frac{1}{2(y+1)}-\frac{3}{3y+4}\right]\frac{dS}{dy}=2\omega^2\frac{(y+1)\varDelta-yS}{(y+1)(3y+4)} \tag{9.97}$$

が得られる．この連立微分方程式は多少複雑であり，完全な解析解を求めることは難しいが，数値的に解くことは難しくない．以下では，長波長の極限において漸近的な解の振る舞いを解析的に調べる．

式 (9.96), (9.97) の長波長極限 $\omega \to 0$ においては，どちらの式でも右辺が無視できるようになる．この場合には，密度ゆらぎ $\varDelta$ とエントロピー摂動 S の発展は独立になる．つまり，ハッブル半径よりも長い波長のゆらぎについては，密度ゆらぎとエントロピーゆらぎを 2 つの独立なモードとみなすことができる．このことにより，超ハッブル・スケールで与えられるゆらぎの初期条件は，密度ゆらぎとエントロピー摂動の重ね合わせで表現できることがわかる．

初期ゆらぎのエントロピー摂動 S がゼロになるような初期条件を**断熱ゆらぎ** (adiabatic perturbations) という．この型の初期条件では，共動座標で見た全密度ゆらぎに対応するバーディーン変数 $\varDelta$ がゼロでないため，ゲージ不変ポテンシャル $\varPhi, \varPsi$ が空間的にゆらいでいる．とくに空間曲率にゆらぎが存在する．式 (9.88) 第 2 式からわかるように，断熱ゆらぎでは放射成分と物質成分の密度ゆらぎの比が場所によらず 4 : 3 の一定値をとる．

逆に，初期ゆらぎのバーディーン変数 $\varDelta$ がゼロになるような初期条件を**等曲率ゆらぎ** (isocurvature perturbations) という．バーディーン変数 $\varDelta$ が厳密にゼロであれば，空間曲率がいたるところでゼロになるため，このような名前で呼ばれている．一般の初期条件は，断熱ゆらぎと等曲率ゆらぎの任意の重ね合わせで与えられる．

9.3.2 超ハッブル・スケールの一般解

2 成分系におけるゆらぎの発展方程式 (9.96), (9.97) を長波長の極限，すなわち超ハッブル・スケールにおいて解析的に解くことを考える．ここで微分方程式を解析的に扱うため，式 (9.96) の左辺において，微分のかからない項が消えるような変数変換を行うと便利である．そのためには

$$\Delta = \frac{F(y)}{y\sqrt{y+1}} \tag{9.98}$$

で定義される新しい変数 F を導入するとよい．このとき，連立微分方程式 (9.96), (9.97) は

$$\frac{d}{dy}\left[\frac{(y+1)^{3/2}}{y^2(3y+4)}\frac{dF}{dy}\right] = -\frac{8\omega^2}{3}\frac{\sqrt{y+1}F - y^2 S}{y^2(3y+4)^2} \tag{9.99}$$

$$\frac{d}{dy}\left[\frac{y\sqrt{y+1}}{3y+4}\frac{dS}{dy}\right] = 2\omega^2\frac{\sqrt{y+1}F - y^2 S}{\sqrt{y+1}(3y+4)^2} \tag{9.100}$$

と簡単化する．ここで，超ハッブル・スケールの極限では ω^2 の値がゼロに近づくことに着目する．そこで，このパラメータ ω を小さな値とみなして，逐次近似により超ハッブル・スケールにおける一般解を求めることができる．

0 次解

まず，パラメータ ω^2 の 0 次解を得るため，式 (9.99), (9.100) で $\omega^2 = 0$ とおいた方程式

$$\frac{d}{dy}\left[\frac{(y+1)^{3/2}}{y^2(3y+4)}\frac{dF}{dy}\right] = 0, \qquad \frac{d}{dy}\left[\frac{y\sqrt{y+1}}{3y+4}\frac{dS}{dy}\right] = 0 \tag{9.101}$$

を考える．上にも述べたように，この極限では密度ゆらぎとエントロピー摂動が独立に発展する．どちらの方程式にも変数に関する 1 階微分と 2 階微分しか現れないので，dF/dy, dS/dy に関する 1 階微分方程式とみなして変数分離法により積分し，さらにもう一度積分すれば一般解が求まる．その結果，

$$F(y) = A_1 + A_2\frac{9y^3 + 2y^2 - 8y - 16}{\sqrt{y+1}} \tag{9.102}$$

$$S(y) = B_1 + B_2\left[\sqrt{y+1} + \frac{2}{3}\ln\left(\frac{1-\sqrt{y+1}}{1+\sqrt{y+1}}\right)\right] \tag{9.103}$$

が得られる．ただし A_1, A_2, B_1, B_2 は積分定数である．

最初に，密度ゆらぎの一般解の式 (9.102) を考察する．放射優勢期における成長解がその後のゆらぎを支配するので，2 つの積分定数の組み合わせにより成長解を

取り出す必要がある．放射優勢期の振る舞いを知るため，式 (9.102) を y で展開すると

$$F(y) = A_1 - 16A_2 + 10A_2 y^3 + \mathcal{O}\left(y^4\right) \tag{9.104}$$

が得られる．ここで定数項の部分は $y \ll 1$ の極限で成長しないから，成長解を導く積分定数の組み合わせは

$$A_1 = 16A_2 \tag{9.105}$$

である．この関係を式 (9.102) へ代入することにより，関数 F の成長解は

$$F = A_2 \frac{9y^3 + 2y^2 - 8y - 16 + 16\sqrt{y+1}}{\sqrt{y+1}} \tag{9.106}$$

となることがわかる．

次に，エントロピー摂動の一般解の式 (9.103) を考察する．対数関数の部分は $y > 0$ に対して実数値を持たないので，物理的に意味のある解は $B_2 = 0$ である．つまり，長波長極限におけるエントロピー摂動は時間的に一定である．その一定値を $B_1 = S_{\mathrm{i}}$ とおき，解を

$$S = S_{\mathrm{i}} \tag{9.107}$$

と表す．エントロピー摂動が超ハッブル・スケールで時間的に変化しないことは，因果律の観点からも説明できる．なぜなら，式 (9.91) で見たように，エントロピー摂動はエントロピーあたりの物質粒子数のゆらぎであり，この量は熱伝導がない限り変化しない．超ハッブル・スケールで熱伝導が起こることは因果律に反するので，そのスケールのエントロピー摂動は時間的に一定に保たれなければならない．

式 (9.106) で求めた変数 F の解から，バーディーン変数の具体的な形を導いておく．放射優勢期 $y \ll 1$ においては $F \to 10A_2 y^3$ となるから，式 (9.98) により $\varDelta \to 10A_2 y^2$ となり，さらに式 (9.95) 第 1 式により，ポテンシャルは $\varPhi \to -15A_2/2\omega^2$ と時間的に変化しない一定値になる．前節の単成分近似の取り扱いでも，放射優勢期においてポテンシャルが時間的に変化しないことが導かれ，その一定値を $\varPhi_{\mathrm{i}}$ とおいた．そこで

$$A_2 = -\frac{2}{15}\varPhi_{\mathrm{i}}\omega^2 \tag{9.108}$$

とおいて式 (9.106) を式 (9.98) へ代入すると，変数 $\varDelta$ の成長解とその漸近形として

$$\varDelta = -\frac{2}{15}\varPhi_{\rm i}\omega^2 \frac{9y^3+2y^2-8y-16+16\sqrt{y+1}}{y(y+1)} \to \begin{cases} -\dfrac{4}{3}\varPhi_{\rm i}\omega^2 y^2 & (y \ll 1) \\ -\dfrac{6}{5}\varPhi_{\rm i}\omega^2 y & (y \gg 1) \end{cases} \tag{9.109}$$

が得られる．この結果と式 (9.95) 第 1 式により，ゲージ不変ポテンシャルの成長は

$$\varPhi = \frac{\varPhi_{\rm i}}{10}\frac{9y^3+2y^2-8y-16+16\sqrt{y+1}}{y^3} \to \begin{cases} \varPhi_{\rm i} & (y \ll 1) \\ \dfrac{9}{10}\varPhi_{\rm i} & (y \gg 1) \end{cases} \tag{9.110}$$

で与えられる．さらにこれを式 (9.95) 第 2 式に代入して計算すると，速度場は

$$V = -\frac{\sqrt{2}\varPhi_{\rm i}}{5k_{\rm eq}}\frac{\left(3y^2-4y+8\right)\sqrt{y+1}-8}{y^2} \to \begin{cases} -\dfrac{\varPhi_{\rm i}}{\sqrt{2}k_{\rm eq}}y & (y \ll 1) \\ -\dfrac{3\sqrt{2}\varPhi_{\rm i}}{5k_{\rm eq}}y^{1/2} & (y \gg 1) \end{cases} \tag{9.111}$$

となる．さらに式 (7.179) で与えられる共形ニュートン・ゲージの密度ゆらぎに対応するゲージ不変量 $\delta^{\rm (GI)}$ を求めておく．式 (9.85), (9.87) を使い，さらに ω^2 の高次項を無視することにより，

$$\delta^{\rm (GI)} = -\frac{\varPhi_{\rm i}}{5}\frac{(3y+4)\left(3y^3-y^2+4y+8-8\sqrt{y+1}\right)}{y^3(y+1)} \to \begin{cases} -2\varPhi_{\rm i} & (y \ll 1) \\ -\dfrac{9}{5}\varPhi_{\rm i} & (y \gg 1) \end{cases} \tag{9.112}$$

が得られる．さらに式 (7.223) で与えられる曲率ゆらぎ ζ を求めておく．いま非等方応力のない場合を考えているので，$\varPsi = -\varPhi$ により

$$\zeta = -\varPhi + \mathscr{H}V \tag{9.113}$$

となる．ここへ式 (9.87), (9.110), (9.111) を代入すると，時間依存性がすべて打ち消しあい，

$$\zeta = -\frac{3}{2}\varPhi_{\rm i} \tag{9.114}$$

が得られる．この結果は漸近形ではなく，等密度時前後を通じて成り立つ．曲率ゆ

らぎは，確かに超ホライズン・スケールで時間的に一定となっている．

1 次解

変数 F, S に対する超ハッブル・スケールの極限 $\omega^2 \ll 1$ における 0 次の成長解は式 (9.106), (9.107) で得られた．この 0 次の近似において断熱ゆらぎと等曲率ゆらぎは独立に時間発展する．だが，実際には超ハッブル・スケールでも，ω^2 の高次の効果としてこれら 2 つのモードは弱く結合している．このモード結合の効果により，断熱ゆらぎのモードにも徐々にエントロピー摂動が生成され，等曲率ゆらぎのモードにも徐々に密度ゆらぎが生成される．以下では，このモード結合の効果を調べる．線形理論における一般的なゆらぎの成長は，初期条件として断熱ゆらぎを持つモードと等曲率ゆらぎを持つモードの線形重ね合わせで与えられるから，結合の最低次近似では，これらのモードごとに別々に調べれば十分である．

最初に等曲率ゆらぎモードを考える．このモードには初期条件に密度ゆらぎ Δ が存在せず，したがって 0 次解では $F = 0$ であるが，モード結合の効果により徐々に密度ゆらぎも生成されてくる．発展方程式 (9.99) の右辺に最低次の解 $F = 0, S = S_{\mathrm{i}}$ を代入すると，1 次補正の解に対する方程式

$$\frac{d}{dy}\left[\frac{(y+1)^{3/2}}{y^2(3y+4)}\frac{dF}{dy}\right] = \frac{8S_{\mathrm{i}}\omega^2}{3}\frac{1}{(3y+4)^2} \tag{9.115}$$

が得られる．この方程式は dF/dy に関する 1 階微分方程式であり，初等的に積分することができる．その結果，

$$\frac{dF}{dy} = \frac{y^2}{(y+1)^{3/2}}\left[C_1(3y+4) - \frac{8}{9}S_{\mathrm{i}}\omega^2\right] \tag{9.116}$$

が得られる．ただし C_1 は積分定数である．この解を y で展開すると，

$$\frac{dF}{dy} = \left(4C_1 - \frac{8}{9}S_{\mathrm{i}}\omega^2\right)y^2 + \mathscr{O}\left(y^3\right) \tag{9.117}$$

となる．ここで放射優勢期の成長解は，y のべきができるだけ高い項から始まる独立解である．そこで最低次の項である y^2 の係数がゼロになるような積分定数の値

$$C_1 = \frac{2}{9}S_{\mathrm{i}}\omega^2 \tag{9.118}$$

を持つものが成長解に対応する．この積分定数の値を式 (9.116) へ代入すると，

$$\frac{dF}{dy} = \frac{2}{3}S_{\mathrm{i}}\omega^2\frac{y^3}{(y+1)^{3/2}} \tag{9.119}$$

が得られる．両辺の積分により，

$$F = \frac{4}{15} S_{\mathrm{i}} \omega^2 \frac{y^3 - 2y^2 + 8y + 16}{\sqrt{y+1}} + C_2 \tag{9.120}$$

が得られる．ただし C_2 は積分定数である．上式を y で展開すると

$$F = C_2 + \frac{64}{15} S_{\mathrm{i}} \omega^2 + \mathcal{O}(y^4) \tag{9.121}$$

となるので，成長解を与える積分定数は

$$C_2 = -\frac{64}{15} S_{\mathrm{i}} \omega^2 \tag{9.122}$$

である．この値を式 (9.120) へ代入すると，成長解は

$$F = \frac{4}{15} S_{\mathrm{i}} \omega^2 \frac{y^3 - 2y^2 + 8y + 16 - 16\sqrt{y+1}}{\sqrt{y+1}} \tag{9.123}$$

であることがわかる．

上の結果と式 (9.98) により，等曲率ゆらぎのモードに対して密度ゆらぎに対応するバーディーン変数の成長解とその漸近形は

$$\varDelta = \frac{4}{15} S_{\mathrm{i}} \omega^2 \frac{y^3 - 2y^2 + 8y + 16 - 16\sqrt{y+1}}{y(y+1)} \to \begin{cases} \dfrac{1}{6} S_{\mathrm{i}} \omega^2 y^3 & (y \ll 1) \\ \dfrac{4}{15} S_{\mathrm{i}} \omega^2 y & (y \gg 1) \end{cases} \tag{9.124}$$

で与えられる．このようにして，一定のエントロピーゆらぎから密度ゆらぎが生成されていくことがわかる．また，式 (9.95) により

$$\varPhi = -\frac{S_{\mathrm{i}}}{5} \frac{y^3 - 2y^2 + 8y + 16 - 16\sqrt{y+1}}{y^3} \to \begin{cases} -\dfrac{1}{8} S_{\mathrm{i}} y & (y \ll 1) \\ -\dfrac{1}{5} S_{\mathrm{i}} & (y \gg 1) \end{cases} \tag{9.125}$$

および

$$V = \frac{2\sqrt{2}}{5k_{\mathrm{eq}}} S_{\mathrm{i}} \frac{8(3y+4) + \left(y^3 - 8y - 32\right)\sqrt{y+1}}{y^2(3y+4)} \to \begin{cases} \dfrac{1}{4\sqrt{2}k_{\mathrm{eq}}} S_{\mathrm{i}} y^2 & (y \ll 1) \\ \dfrac{2\sqrt{2}}{15k_{\mathrm{eq}}} S_{\mathrm{i}} y^{1/2} & (y \gg 1) \end{cases} \tag{9.126}$$

が得られる．式 (9.125) からわかるように，等曲率ゆらぎであっても超ハッブル・

スケールのゲージ不変ポテンシャル Φ はゼロではない．十分初期の放射優勢期の極限 $y \ll 1$ ではほとんどゼロであるが，時間とともに増加してくる．これは，大スケールでもエントロピー摂動が密度ゆらぎに弱く結合しているため，バーディン変数 Δ が微小な値を持つからである．そしてポテンシャルは密度ゆらぎに k^{-2} の因子がかけられたものなので，超ハッブル・スケールでは，密度ゆらぎが小さくてもポテンシャルは大きな値を持ち得る．すなわち，初期条件として空間曲率が完全に一定の等曲率ゆらぎがあったとしても，時間発展における結合の効果によって，その等曲率性は徐々に失われていく．

共形ニュートン・ゲージの密度ゆらぎに対応するゲージ不変量 $\delta^{(\mathrm{GI})}$ の表式を求めるため，式 (7.179) に上の結果と式 (9.85), (9.87) を代入し，さらに ω^2 の高次項を無視すると

$$\delta^{(\mathrm{GI})} = \frac{2}{5}S_{\mathrm{i}}\,\frac{y^4 + y^3 - 8y^2 - 40y - 32 + 8(3y+4)\sqrt{y+1}}{y^3(y+1)} \to \begin{cases} \dfrac{1}{2}S_{\mathrm{i}}y & (y \ll 1) \\ \dfrac{2}{5}S_{\mathrm{i}} & (y \gg 1) \end{cases} \tag{9.127}$$

となる．ここからわかるように，共形ニュートン・ゲージで見た密度ゆらぎの成長解は，等曲率ゆらぎであっても結合の効果によって超ハッブル・スケールで成長し，ゼロでない値をとる．さらに曲率ゆらぎについては，式 (9.113) へ上の結果を代入することにより，

$$\zeta = S_{\mathrm{i}}\frac{y}{3y+4} \to \begin{cases} \dfrac{1}{4}S_{\mathrm{i}}y & (y \ll 1) \\ \dfrac{1}{3}S_{\mathrm{i}} & (y \gg 1) \end{cases} \tag{9.128}$$

となる．曲率ゆらぎが超ハッブル・スケールで時間的に一定に保たれる条件の 1 つは，断熱ゆらぎとなっていることである．放射優勢期の曲率ゆらぎは，エントロピーゆらぎの効果によって，時間的に変化している．

次に，断熱ゆらぎのモードを考える．断熱ゆらぎにエントロピー摂動が生成される過程は，上と同様に結合の 1 次解を求めることで調べられる．そこで，エントロピー摂動に関する式 (9.100) の右辺に 0 次の成長解である式 (9.106) を代入すると，1 次補正を求める方程式は

$$\frac{d}{dy}\left[\frac{y\sqrt{y+1}}{3y+4}\frac{dS}{dy}\right] = -\frac{4}{15}\Phi_{\mathrm{i}}\omega^4 \frac{9y^3+2y^2-8y-16+16\sqrt{y+1}}{\sqrt{y+1}(3y+4)^2} \tag{9.129}$$

となる．ここからわかるように，断熱ゆらぎから生成されるエントロピー摂動は，因子 ω^4 で抑制される小さいものである．この方程式を 1 回積分すると，

$$\frac{dS}{dy} = \frac{8}{5}\Phi_{\mathrm{i}}\omega^4\left(\frac{8}{y}+\frac{8}{3}-\frac{y}{3}+\frac{8}{9y\sqrt{y+1}}\right)+C_3\frac{3y+4}{y\sqrt{y+1}} \tag{9.130}$$

が得られる．ただし C_3 は積分定数である．これを y で展開すると，

$$\frac{dS}{dy} = 4\left(\frac{32}{9}\Phi_{\mathrm{i}}\omega^4+C_3\right)y^{-1}+\mathscr{O}(y^0) \tag{9.131}$$

となる．したがって成長解を与える積分定数は

$$C_3 = -\frac{32}{9}\Phi_{\mathrm{i}}\omega^4 \tag{9.132}$$

である．これを式 (9.130) へ代入して積分すると，

$$S = -\frac{4}{5}\Phi_{\mathrm{i}}\omega^4\left[\frac{y^2-16y-17+80\sqrt{y+1}}{3}-32\ln\left(1+\sqrt{y+1}\right)\right]+C_4 \tag{9.133}$$

が得られる．ただし C_4 は積分定数である．これを y で展開すると，

$$S = C_4+\frac{4}{5}(32\ln 2-21)\,\Phi_{\mathrm{i}}\omega^4+\mathscr{O}\left(y^4\right) \tag{9.134}$$

となるので，成長解に対応する積分定数の値は

$$C_4 = -\frac{4}{5}(32\ln 2-21)\,\Phi_{\mathrm{i}}\omega^4 \tag{9.135}$$

である．これを式 (9.133) へ代入したものと，その漸近形は

$$S = -\frac{4}{5}\Phi_{\mathrm{i}}\omega^4\left[\frac{y^2-16y-80+80\sqrt{y+1}}{3}-32\ln\left(\frac{1+\sqrt{y+1}}{2}\right)\right] \tag{9.136}$$

$$\rightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{24}\Phi_{\mathrm{i}}\omega^4 y^4 & (y \ll 1) \\ -\dfrac{4}{15}\Phi_{\mathrm{i}}\omega^4 y^2 & (y \gg 1) \end{cases} \tag{9.137}$$

で与えられる．

以上により，超ハッブル・スケールにおいて支配的な項はすべて求められた．こ

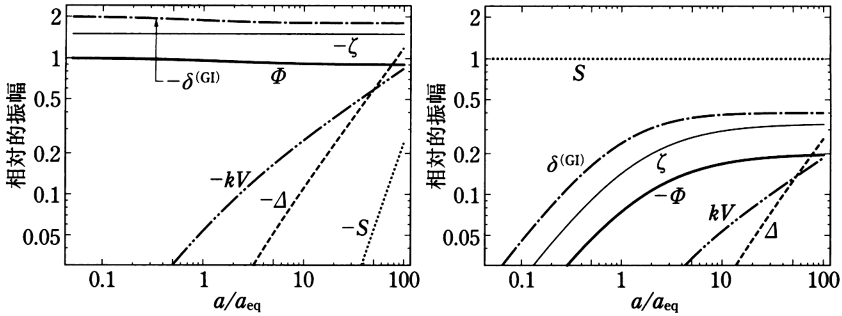


図 9.3 2 成分近似による，超ハッブル・スケールにおける各種ゆらぎの時間発展．左図：断熱ゆらぎの場合で，各振幅は Φ_{i} で規格化したもの．右図：等曲率ゆらぎの場合で，各振幅は S_{i} で規格化したもの．ただし $\omega = k/k_{\mathrm{eq}} = 0.1$ とした．

こで放射優勢期 $y \ll 1$ と物質優勢期 $y \gg 1$ の間を表す関数形は見かけ上複雑であるが，実際には 2 つの漸近形をなめらかにつなぐだけの単調な振る舞いをする．これらの関数を図示すれば，図 9.3 のようになる．

断熱ゆらぎと等曲率ゆらぎのモードは独立なので，これらが共存する一般の初期条件の場合，上に得られた解をすべて足し合わせたものが解である．漸近形をまとめて表すと，放射優勢期 $y \ll 1$ では

$$\Phi = \Phi_{\mathrm{i}} - \frac{1}{8}S_{\mathrm{i}}y, \quad \Delta = -\frac{4}{3}\Phi_{\mathrm{i}}\omega^2 y^2 + \frac{1}{6}S_{\mathrm{i}}\omega^2 y^3, \quad V = \frac{1}{\sqrt{2}k_{\mathrm{eq}}}\left(-\Phi_i y + \frac{1}{4}S_{\mathrm{i}}y^2\right),$$
$$\delta^{(\mathrm{GI})} = -2\Phi_{\mathrm{i}} + \frac{1}{2}S_{\mathrm{i}}y, \quad \zeta = -\frac{3}{2}\Phi_{\mathrm{i}} + \frac{1}{4}S_{\mathrm{i}}y, \quad S = -\frac{1}{24}\Phi_{\mathrm{i}}\omega^4 y^4 + S_{\mathrm{i}} \qquad (9.138)$$

となり，物質優勢期 $y \gg 1$ では

$$\Phi = \frac{9}{10}\left(\Phi_{\mathrm{i}} - \frac{2}{9}S_{\mathrm{i}}\right), \quad \Delta = -\frac{6}{5}\left(\Phi_{\mathrm{i}} - \frac{2}{9}S_{\mathrm{i}}\right)\omega^2 y, \quad V = -\frac{9\sqrt{2}}{15k_{\mathrm{eq}}}y^{1/2}\left(\Phi_{\mathrm{i}} - \frac{2}{9}S_{\mathrm{i}}\right)$$
$$\delta^{(\mathrm{GI})} = -\frac{9}{5}\left(\Phi_{\mathrm{i}} - \frac{2}{9}S_{\mathrm{i}}\right), \quad \zeta = -\frac{3}{2}\left(\Phi_{\mathrm{i}} - \frac{2}{9}S_{\mathrm{i}}\right), \quad S = -\frac{4}{15}\Phi_{\mathrm{i}}\omega^4 y^4 + S_{\mathrm{i}} \qquad (9.139)$$

となる．放射優勢期において密度ゆらぎに関係する変数に着目すると，S_{i} に比例する等曲率ゆらぎの寄与は Φ_{i} に比例する断熱ゆらぎの寄与に対して y のべきが 1 つだけ大きい．等曲率ゆらぎでは，密度ゆらぎの成分が最初になく，時間発展における結合の効果によって徐々に生成されるためである．また，断熱ゆらぎから生成されるエントロピー摂動は ω^4 に比例し，超ハッブル・スケールで非常に小さい値に抑制されていることがわかる．

一方，物質優勢期において密度ゆらぎに関係する変数は，すべて $\Phi_{\mathrm{i}} - 2S_{\mathrm{i}}/9$ に比例する．すなわち，等曲率ゆらぎの初期エントロピー摂動 S_{i} が実効的に $-2S_{\mathrm{i}}/9$ の値を持つ初期ポテンシャル Φ_{i} と同じ役割を果たし，物質優勢期以降のゆらぎの成長は断熱ゆらぎでも等曲率ゆらぎでも似たようなものになる．実際，図 9.3 を見ても，物質優勢期の極限である右端ではエントロピー摂動を除けばどれも同じ形になっている．超ハッブル・スケールで非常に小さい値となる ω^4 を無視すれば，物質優勢期のゲージ不変ポテンシャル Φ の値とエントロピー摂動 S の値は一定値をとる．この近似において，式 (9.139) の最初と最後の式は

$$\begin{pmatrix} \Phi \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/10 & -1/5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{\mathrm{i}} \\ S_{\mathrm{i}} \end{pmatrix} \tag{9.140}$$

と表される．ここに現れる 2×2 行列は，放射優勢期から物質優勢期へかけて，超ハッブル・スケールにおけるゆらぎの遷移を与える行列，つまり遷移行列となる．この長波長極限では遷移行列が一定の行列になるが，一般のスケールでは波長や時間の関数となり，その正確な値を求めるには数値積分が必要である．

9.4 諸成分ゆらぎの発展方程式

実際の宇宙に存在する種々のエネルギー成分間には，一般に重力以外にも直接の相互作用が働く．これまでの節では，これら直接の相互作用を無視し，さらにエネルギー成分を完全流体で近似してきた．現実の宇宙におけるゆらぎの時間発展を正確に取り扱うには，こうした近似を外す必要がある．成分間の相互作用を考慮したゆらぎの時間発展は，一般にボルツマン方程式によって記述できる．線形摂動に対する一般的なボルツマン方程式は，7.6 節で導いた．以下では，現実の宇宙に存在する種々のエネルギー成分に対する，線形摂動の時間発展を考える．その発展方程式は，少なくない数の連立微分方程式となり，正確に解くには数値的に解を求めることが必要になる．

以下の取り扱いでは，基本的に共形ニュートン・ゲージのゆらぎに対応するゲージ不変量を用いることにする．各エネルギー成分 a に対する密度ゆらぎ変数を $\delta_a^{(\mathrm{GI})}$ とし，対応する摂動分布関数のスカラー成分を $\delta f_a^{(\mathrm{GI})}$ とする．簡単のため，大局的曲率は無視できるものとして $K = 0$ とする．この場合は背景時空に直交座標 $\boldsymbol{x}$ を張ることができるので，モード分解には通常の平坦空間のフーリエ分解を適用する．すなわちモード分解の直交基底を $e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$ として平面波展開する．

9.4.1 コールド・ダークマター

コールド・ダークマターは，その定義によって他の物質と重力以外の相互作用をせず，また，圧力と自由運動が無視できる非相対論的粒子から構成される物質である．すなわち，圧力のない完全流体として記述されるので，この成分には固有のエントロピーゆらぎや非等方応力が存在しない．宇宙に存在する物質の中ではとくに簡単な性質を持つ．直接の相互作用を持たないことから，7.5.3 項の結果が適用でき，式 (7.280), (7.281) により，コールド・ダークマターのゲージ不変密度ゆらぎ $\delta_{\rm c}^{\rm (GI)}$ とゲージ不変スカラー速度 $v_{\rm c}^{\rm (GI)}$ の発展方程式は

$$\delta_{\rm c}^{\rm (GI)\prime} - k^2 v_{\rm c}^{\rm (GI)} + 3\Psi' = 0 \tag{9.141}$$

$$v_{\rm c}^{\rm (GI)\prime} + \mathscr{H} v_{\rm c}^{\rm (GI)} + \Phi = 0 \tag{9.142}$$

である．コールド・ダークマターは，2 つのゲージ不変ポテンシャル Φ, Ψ を通じて重力的に他の成分と結合している．これらのポテンシャルは，各時刻ごとに全成分のゆらぎから式 (7.160), (7.161) によって決まる値を持つ．

9.4.2 質量の無視できるニュートリノ

次に，質量が十分小さく相対論的に振る舞うニュートリノの種類を考える．ニュートリノは，重力相互作用の他には弱い相互作用しかせず，宇宙進化の早い段階で他の成分と脱結合して，実質的に無衝突粒子となる．相対論的な無衝突粒子の場合，粒子の自由運動が大きくなるので，流体近似が成り立たない．したがって，分布関数とボルツマン方程式によって取り扱うことが必要となる．

ニュートリノは衝突項を持たないため，無衝突ボルツマン方程式にしたがう．背景成分のボルツマン方程式 (7.321) は，

$$\bar{f}_\nu{}'(q,\tau) = 0 \tag{9.143}$$

である．ここで添字 ν は（質量の無視できる）ニュートリノを表す．この方程式により，背景成分の分布関数は時間的に一定で q だけの関数 $\bar{f}_\nu(q)$ となる．いま質量が無視できる場合を考えているので，背景成分のエネルギー密度 $\bar{\rho}_\nu$ と圧力 $\bar{p}_\nu$ を分布関数で表す式 (7.332), (7.333) により

$$\bar{\rho}_\nu = 3\bar{p}_\nu = \frac{1}{a^4}\int \frac{q^2 dq}{2\pi^2} q \bar{f}_\nu \tag{9.144}$$

が成り立つ．

次に摂動成分のボルツマン方程式 (7.345) を考える．いま，平坦空間中に直交座標が張られているので，平面波展開における空間微分は $\nabla \to i\boldsymbol{k}$ と置き換わり，また 3 次元クリストッフェル記号 ${}^{(3)}\Gamma^i_{jk}$ はゼロである．さらに，質量が無視できる無衝突粒子であることにより，方程式は簡単化して，

$$\delta f_\nu^{(\mathrm{GI})\prime} + i(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k})\,\delta f_\nu^{(\mathrm{GI})} - [i(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k})\Phi + \Psi']\,q\frac{\partial \bar{f}_\nu}{\partial q} = 0 \tag{9.145}$$

となる．ここで $\boldsymbol{n}$ は式 (7.312) 第 2 式で定義される．いま背景時空が平坦であることから，3 次元一様空間の双対基底は $\hat{\mathrm{e}}^i_{(j)} = \delta^i_j$ で与えられる．したがってこの場合には $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{q}/q$ となる．ただし，$\boldsymbol{q}$ は摂動時空における局所平坦空間上での規格化された運動量を表す 3 次元ベクトルである．

摂動量についての巨視的変数は，式 (7.347)–(7.350) の平面波展開により，

$$\delta_\nu^{(\mathrm{GI})} = \frac{1}{\bar{\rho}_\nu a^4}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\,q\,\delta f_\nu^{(\mathrm{GI})} \tag{9.146}$$

$$\delta p_\nu^{(\mathrm{GI})} = \frac{1}{3a^4}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\,q\,\delta f_\nu^{(\mathrm{GI})} \tag{9.147}$$

$$v_\nu^{(\mathrm{GI})} = -\frac{i}{k}\frac{1}{(\bar{\rho}_\nu + \bar{p}_\nu)a^4}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\,q\,\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k}}{k}\,\delta f_\nu^{(\mathrm{GI})} \tag{9.148}$$

$$\Pi_\nu^{(\mathrm{S})} = -\frac{3}{2k^2}\frac{1}{\bar{p}_\nu a^4}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\,q\left[\frac{(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k})^2}{k^2} - \frac{1}{3}\right]\delta f_\nu^{(\mathrm{GI})} \tag{9.149}$$

で与えられる．ただし式 (9.148), (9.149) を示すには，もとの式の左辺に空間微分から波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ が出てくるので，それを両辺で縮約するとよい．これらの表式を見ると，右辺の積分における $\boldsymbol{q}$ の動径方向積分が，すべて分布関数を q^3 の重みで積分する形になっている．そこで

$$F(\boldsymbol{n},\boldsymbol{k},\tau) \equiv \frac{\displaystyle\int dq\,q^3\,\delta f_\nu^{(\mathrm{GI})}(q,\boldsymbol{n},\boldsymbol{k},\tau)}{\displaystyle\int dq\,q^3\,\bar{f}_\nu(q,\tau)} = \frac{1}{\bar{\rho}_\nu a^4}\int\frac{q^2dq}{2\pi^2}\,q\,\delta f_\nu^{(\mathrm{GI})}(q,\boldsymbol{n},\boldsymbol{k},\tau) \tag{9.150}$$

という関数を定義すると便利である．巨視的変数の式 (9.146)–(9.149) はこの関数を用いた角度積分によって表される．ボルツマン方程式 (9.145) と式 (9.143) により，上の関数は微分方程式

$$F' + ik\mu F + 4ik\mu\Phi + 4\Psi' = 0 \tag{9.151}$$

を満たす．ここで $\mu \equiv \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k}/k$ は波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ と運動量の方向ベクトル $\boldsymbol{n}$ の間の方向余弦である．

ここで，方程式 (9.151) の係数には，運動量の方向に依存する量として μ しか現れないことに注目する．初期条件において分布関数が μ にしか依存せず，運動量分布の方向依存性が波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ の方向に対して軸対称であれば，発展方程式の対称性によりその軸対称性はその後も保たれる．特殊な初期条件でそのようなモードを励起させるのでなければ，宇宙の等方性によりスカラー型摂動成分に対するこの軸対称性は自然なものである．このことを仮定すると，運動量の方向ベクトル $\boldsymbol{n}$ は μ を通じてのみ分布関数に依存する．このとき，式 (9.151) における方向余弦 μ への依存性を，ルジャンドル展開により

$$F(\boldsymbol{n},\boldsymbol{k},\tau) = \sum_{l=0}^{\infty}(-i)^l(2l+1)F_l(\boldsymbol{k},\tau)P_l(\mu) \tag{9.152}$$

とし，係数 F_l を独立変数と考える．ただし，$P_l(\mu)$ はルジャンドル多項式である（付録 B.9 参照）．ルジャンドル多項式の最初の 3 つは

$$P_0(\mu) = 1, \quad P_1(\mu) = \mu, \quad P_2(\mu) = \frac{3\mu^2-1}{2} \tag{9.153}$$

である．また直交関係

$$\int_{-1}^{1} d\mu P_l(\mu)P_{l'}(\mu) = \frac{2\delta_{ll'}}{2l+1} \tag{9.154}$$

が成り立つ．このルジャンドル多項式の直交関係により，式 (9.152) の逆変換は

$$F_l(\boldsymbol{k},\tau) = \frac{i^l}{2}\int_{-1}^{1} d\mu F(\boldsymbol{n},\boldsymbol{k},\tau)P_l(\mu) = \frac{i^l}{\bar{\rho}_\nu a^4}\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} q\, P_l(\mu)\,\delta f^{(\mathrm{GI})} \tag{9.155}$$

であることがわかる．ここで式 (9.144) および式 (9.146)–(9.149) から，

$$F_0 = \delta_\nu^{(\mathrm{GI})}, \quad F_1 = -\frac{4}{3}k\, v_\nu^{(\mathrm{GI})}, \quad F_2 = \frac{k^2}{3}\Pi_\nu^{(\mathrm{S})} \tag{9.156}$$

と対応する．

関数 F に対する微分方程式 (9.151) はルジャンドル展開の係数 F_l に対する微分方程式に変換することができる．具体的には，まず式 (9.152) を式 (9.151) へ代入する．そしてルジャンドル多項式の再帰関係式 (B.48) から

$$(2l+1)\mu P_l(\mu) = (l+1)P_{l+1}(\mu) + lP_{l-1}(\mu) \tag{9.157}$$

が成り立つこと，および式 (9.153) を用いると，方程式中の μ 依存性をルジャンドル多項式で展開した形に表すことができる．こうして得られる方程式において，ルジャンドル多項式の直交関係 (9.154) を適用すれば，ルジャンドル多項式の各次数にかかる係数ごとに方程式が成り立つ．以上の手続きにより，

$$\delta_\nu^{(\mathrm{GI})\prime} - \frac{4}{3}k^2 v_\nu^{(\mathrm{GI})} + 4\Psi' = 0 \tag{9.158}$$

$$v_\nu^{(\mathrm{GI})\prime} + \frac{1}{4}\delta_\nu^{(\mathrm{GI})} - \frac{k^2}{6}\Pi_\nu^{(\mathrm{S})} + \Phi = 0 \tag{9.159}$$

$$\Pi_\nu^{(\mathrm{S})\prime} + \frac{8}{5}v_\nu^{(\mathrm{GI})} + \frac{9}{5k}F_3 = 0 \tag{9.160}$$

$$F_l' - \frac{k}{2l+1}\left[lF_{l-1} - (l+1)F_{l+1}\right] = 0 \qquad (l \geq 2) \tag{9.161}$$

という連立発展方程式が得られる．

この方程式系は時間についての連立常微分方程式である．最初の式により，変数 $\delta_\nu^{(\mathrm{GI})}$ の時間発展は変数 $v_\nu^{(\mathrm{GI})}$ に依存し，さらに 2 番めの式により変数 $v_\nu^{(\mathrm{GI})}$ の時間発展は変数 $\delta^{(\mathrm{GI})}$ と $\Pi^{(\mathrm{S})}$ に依存する．さらに 3 番めの式より変数 $\Pi^{(\mathrm{S})}$ の時間発展は変数 $v_\nu^{(\mathrm{GI})}$ と F_3 に依存する．さらに変数 F_3 の時間発展は変数 $\Pi^{(\mathrm{S})}$ と F_4 に依存する，というように依存関係が無限に続いていく．すなわち，この無限個の方程式系はすべて隣同士で結合していて，どこまで行っても閉じることがない．このように，ボルツマン方程式が無限個の階層的な微分方程式系となる．

このような無限階層の微分方程式を数値的に解く方法として，十分に高い次数 $l = l_{\max}$ で人工的に方程式を打ち切り，有限個の方程式系にして $l \leq l_{\max}$ だけを近似的に解く，というものがある．ただしこのとき l を打ち切ったことによる人工的な効果が最小になるように注意する必要がある．次数 l が大きいルジャンドル多項式 $P_l(\mu)$ に対応する項は，運動量分布が非常に小さな角度スケールで変化する成分を表している．したがって，上のように十分に高い次数の方程式を無視して無限階層を打ち切る近似は，運動量分布の細かな方向依存性を無視することに対応する．重力との結合は最初の 2 式にしかないため，高い次数の振る舞いはニュートリノ以外の成分の時間発展にあまり影響しない．数値計算においては，低次側の数値的結果が $l_{\max}$ の取り方に依存しないことを確かめることで，この近似的な取り扱いが正当化される．

ただし，上の方法で正確な解を求めるためには $l_{\max}$ を数千以上にとる必要がある．このときには数千個の連立微分方程式を同時に解かなければならず，計算量が膨大になり，計算機による計算時間が非常に長くなる．この問題については，後の

10.3.2 項で触れるように，視線積分法という方法が開発されることで，計算時間を大幅に短縮できるようになっている．

9.4.3 有限質量のニュートリノ

次に，質量が無視できないニュートリノの場合を考え，ゆらぎの発展方程式を導く．分布関数の時間発展はこの場合も無衝突ボルツマン方程式で記述される．質量がある場合は，それがない場合に比べて数値計算の手順が増える．だが，基本的には同様の発展方程式となる．

質量の無視できるニュートリノの場合と同様，背景成分のボルツマン方程式は

$$\bar{f}_\nu{}'(q,\tau) = 0 \tag{9.162}$$

となり，やはり分布関数 $\bar{f}_\nu$ は時間的に一定となる．そこで以下では，これを $\bar{f}_\nu(q)$ と表す．背景成分のエネルギー密度と圧力は，式 (7.332), (7.333) により

$$\bar{\rho}_\nu = \frac{1}{a^4}\int \frac{q^2 dq}{2\pi^2}\sqrt{q^2 + m_\nu{}^2 a^2}\,\bar{f}_\nu \tag{9.163}$$

$$\bar{p}_\nu = \frac{1}{3a^4}\int \frac{q^2 dq}{2\pi^2}\frac{q^2}{\sqrt{q^2 + m_\nu{}^2 a^2}}\bar{f}_\nu \tag{9.164}$$

で与えられる．ただし m_ν は考えているニュートリノの質量である．さらに，平坦空間における無衝突粒子を考えていることから，摂動ボルツマン方程式 (7.345) の平面波展開は，

$$\delta f_\nu^{(\mathrm{GI})\prime} + \frac{ik q\mu}{\sqrt{q^2 + m_\nu{}^2 a^2}}\delta f_\nu^{(\mathrm{GI})} - \left(\frac{\sqrt{q^2 + m_\nu{}^2 a^2}}{q}ik\mu\Phi + \Psi'\right) q\frac{\partial \bar{f}_\nu}{\partial q} = 0 \tag{9.165}$$

となる．ただし $\mu = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k}/k$ である．摂動量についての巨視的変数は，式 (7.347)-(7.350) のモード分解により

$$\delta_\nu^{(\mathrm{GI})} = \frac{1}{\bar{\rho}_\nu a^4}\int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3}\sqrt{q^2 + m_\nu{}^2 a^2}\,\delta f_\nu^{(\mathrm{GI})} \tag{9.166}$$

$$v_\nu^{(\mathrm{GI})} = -\frac{i}{k}\frac{1}{(\bar{\rho}_\nu + \bar{p}_\nu)a^4}\int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} q P_1(\mu)\,\delta f_\nu^{(\mathrm{GI})} \tag{9.167}$$

$$\delta p_\nu^{(\mathrm{GI})} = \frac{1}{3a^4}\int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3}\frac{q^2}{\sqrt{q^2 + m_\nu{}^2 a^2}}\,\delta f_\nu^{(\mathrm{GI})} \tag{9.168}$$

$$\Pi_\nu^{(\mathrm{S})} = -\frac{1}{k^2}\frac{1}{\bar{p}_\nu a^4}\int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3}\frac{q^2}{\sqrt{q^2 + m_\nu{}^2 a^2}} P_2(\mu)\,\delta f_\nu^{(\mathrm{GI})} \tag{9.169}$$

となる．

ここで $m_\nu \to 0$ の極限をとれば質量ゼロの場合の式 (9.146)-(9.149) に帰着する．有限質量の場合は変数 q に関する積分の形が共通ではないため，質量のない場合と異なり，この変数を先に積分して簡単化することはできない．そこで q 依存性を含めたまま分布関数の摂動成分と背景成分の比をルジャンドル展開して

$$\frac{\delta f_\nu^{(\mathrm{GI})}(q, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{k}, \tau)}{\bar{f}_\nu(q)} = \sum_{l=0}^{\infty} (-i)^l (2l+1) G_l(q, \boldsymbol{k}, \tau) P_l(\mu) \tag{9.170}$$

とする．すると式 (9.166)-(9.169) は

$$\delta_\nu^{(\mathrm{GI})} = \frac{1}{\bar{\rho}_\nu a^4} \int \frac{q^2 dq}{2\pi^2} \sqrt{q^2 + m_\nu{}^2 a^2}\, \bar{f}_\nu(q) G_0 \tag{9.171}$$

$$v_\nu^{(\mathrm{GI})} = -\frac{1}{k} \frac{1}{(\bar{\rho}_\nu + \bar{p}_\nu) a^4} \int \frac{q^2 dq}{2\pi^2} q \bar{f}_\nu(q) G_1 \tag{9.172}$$

$$\delta p_\nu^{(\mathrm{GI})} = \frac{1}{3a^4} \int \frac{q^2 dq}{2\pi^2} \frac{q^2 \bar{f}_\nu(q) G_0}{\sqrt{q^2 + m_\nu{}^2 a^2}} \tag{9.173}$$

$$\Pi_\nu^{(\mathrm{S})} = \frac{1}{k^2} \frac{1}{\bar{p}_\nu a^4} \int \frac{q^2 dq}{2\pi^2} \frac{q^2 \bar{f}_\nu(q) G_2}{\sqrt{q^2 + m_\nu{}^2 a^2}} \tag{9.174}$$

と表される．質量なしの場合と同様に計算することにより，ボルツマン方程式からルジャンドル展開の係数に対する連立方程式を導けば，

$$G_0{}' + \frac{kq}{\sqrt{q^2 + m_\nu{}^2 a^2}} G_1 - \Psi' \frac{\partial \ln \bar{f}_\nu}{\partial \ln q} = 0 \tag{9.175}$$

$$G_1{}' - \frac{kq}{3\sqrt{q^2 + m_\nu{}^2 a^2}} (G_0 - 2G_2) + \frac{k\sqrt{q^2 + m_\nu{}^2 a^2}}{3q} \Phi \frac{\partial \ln \bar{f}_\nu}{\partial \ln q} = 0 \tag{9.176}$$

$$G_l{}' - \frac{kq}{(2l+1)\sqrt{q^2 + m_\nu{}^2 a^2}} [l G_{l-1} - (l+1) G_{l+1}] = 0 \quad (l \geq 2) \tag{9.177}$$

が得られる．この方程式系も無限個の階層的な連立微分方程式である．これを数値的に解くには，波数 k だけでなく q についても固定する必要がある．そして十分大きな次数 $l = l_{\max}$ で階層を打ち切って計算するか，あるいは視線積分法を使うかして，有限の手続きで数値解を求めることができる．そしてなるべく多くの q について計算を繰り返し，その結果を内挿するなどして数値的に式 (9.171)-(9.174) を積分すると，巨視的な摂動変数の値が求められる．

9.4.4 光子：偏極を無視する近似的取り扱い

光子は質量を持たないので，ボルツマン方程式の左辺は質量のないニュートリノと同様に与えられるが，電荷を持つ物質との間に直接の相互作用があるため，右辺には衝突項が現れる．元素合成の時期以降，宇宙に存在する電荷のある粒子は，イオン化した原子と自由電子である．この時期には，原子核はもちろんのこと，電子も非相対論的であるため，光子はトムソン散乱により物質粒子と相互作用する．トムソン散乱の断面積は，式 (4.299) で与えられるように粒子質量の 2 乗に反比例する．陽子の質量は電子の 1800 倍以上ある．したがって，1 つの光子が電子とトムソン散乱を起こす確率は，陽イオン原子核とトムソン散乱を起こす確率の 300 万倍以上である．そこで，近似的に光子は電子とだけトムソン散乱すると考えてよい．トムソン散乱の断面積は光子の偏極にも依存する．偏極自由度の扱いは少し複雑になるので，その詳細は次節で述べることにする．この項では，偏極自由度を無視する近似について述べる．

平坦時空で光子がトムソン散乱を受ける場合の衝突項は，6.4.1 項で導かれた式 (6.202) で与えられる．摂動時空においても，7.6 節の取り扱いにより運動量空間は 4 脚場で張られる局所平坦時空上で定義されるので，衝突項の形はほとんど同じ形になる．ここでは，この章の変数を用いて光子のトムソン散乱による衝突項を導いておく．

衝突項の一般的な形は式 (6.76) である．これにより，光子と電子が衝突するトムソン散乱における光子の衝突項は，

$$
\begin{aligned}
\mathscr{C}_\gamma\left[f_\gamma(\boldsymbol{P}_\gamma)\right] = \frac{1}{2}\int d\Pi_{\mathrm{e}} d\Pi'_\gamma d\Pi'_{\mathrm{e}} \frac{(2\pi)^4}{\sqrt{-g}}\delta^4\left(P_\gamma + P_{\mathrm{e}} - P'_\gamma - P'_{\mathrm{e}}\right)|\mathscr{M}|^2 \\
\times\left\{f_\gamma(\boldsymbol{P}'_\gamma)f_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{P}'_{\mathrm{e}})\left[1+f_\gamma(\boldsymbol{P}_\gamma)\right] - f_\gamma(\boldsymbol{P}_\gamma)f_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{P}_{\mathrm{e}})\left[1+f_\gamma(\boldsymbol{P}'_\gamma)\right]\right\} \quad (9.178)
\end{aligned}
$$

という形になる．ここで，f_γ, f_{e} はそれぞれ光子および電子の分布関数であり，スピンと偏極については平均されているものとする．また，電子は十分に希薄で古典統計にしたがうものと仮定し $1 - f_{\mathrm{e}} \simeq 1$ と近似している．分布関数は時空座標にも依存しているが，表記上の簡略化のため引数 $(\boldsymbol{x}, \tau)$ を省略してある．また $d\Pi_{\mathrm{e}}$, $d\Pi'_\gamma$, $d\Pi'_{\mathrm{e}}$ は入射電子，散乱光子，散乱電子のそれぞれの 4 元運動量 P_{e}, P'_γ, P'_{e} に対応する不変運動量要素である．

ここで，一般的な 4 元運動量から式 (7.306) のようにして 4 脚場 $\mathrm{e}_\mu^{(\alpha)}$ 上に展開した変数

$$p^\alpha = aP_\gamma^\mu \mathrm{e}_\mu^{(\alpha)}, \quad q^\alpha = aP_\mathrm{e}^\mu \mathrm{e}_\mu^{(\alpha)}, \quad p'^\alpha = aP_\gamma'^\mu \mathrm{e}_\mu^{(\alpha)}, \quad q'^\alpha = aP_\mathrm{e}'^\mu \mathrm{e}_\mu^{(\alpha)} \tag{9.179}$$

を導入する．このとき，p^α/a, q^α/a などが 4 脚場を基底とする局所平坦空間での物理的な運動量に対応する．4 元運動量が質量殻上にある条件と，光子の質量がゼロであること，および電子は非相対論的で $q \ll m_\mathrm{e}a$ となることにより，時間成分について

$$p^0 = p, \quad q^0 = \sqrt{m_\mathrm{e}{}^2a^2 + q^2} \simeq m_\mathrm{e}a + \frac{q^2}{2m_\mathrm{e}a}, \quad p'^0 = p', \quad q'^0 \simeq m_\mathrm{e}a + \frac{q'^2}{2m_\mathrm{e}a} \tag{9.180}$$

が成り立つ．ただし

$$p = |\boldsymbol{p}|, \qquad q = |\boldsymbol{q}|, \qquad p' = |\boldsymbol{p}'|, \qquad q' = |\boldsymbol{q}'| \tag{9.181}$$

と定義した．すると式 (9.178) に現れる不変運動量要素は，式 (7.326) と同様にデルタ関数をエネルギーで積分することにより，

$$d\Pi_\mathrm{e} = \frac{2d^3q}{(2\pi)^3 2a^2\sqrt{q^2 + m_\mathrm{e}{}^2a^2}} \simeq \frac{d^3q}{(2\pi)^3 m_\mathrm{e}a^3} \tag{9.182}$$

$$d\Pi'_\gamma = \frac{d^3p'}{(2\pi)^3a^2p'}, \qquad d\Pi'_\mathrm{e} \simeq \frac{d^3q'}{(2\pi)^3 m_\mathrm{e}a^3} \tag{9.183}$$

と置き換えられる．ただし電子が非相対論的であることを用いた．ここでの運動量要素は式 (6.74) で定義されるものであり，各粒子の自由度を因子として含んでいる．光子と電子の自由度はどちらも 2 である．

4 脚場の行列式は，式 (1.134) のように $\det(\mathrm{e}_\mu^{(\alpha)}) = \sqrt{-g}$ であるから，変換式 (9.179) における変換のヤコビアン $\partial(p^\alpha)/\partial(P_\gamma^\mu)$ などは，すべて $a^4\sqrt{-g}$ に等しい．デルタ関数の引数を変換するとヤコビアンが因子としてかかるので，式 (9.178) に現れる 4 次元デルタ関数の部分は，

$$\frac{(2\pi)^4}{\sqrt{-g}}\delta_\mathrm{D}^4\left(P_\gamma + P_\mathrm{e} - P'_\gamma - P'_\mathrm{e}\right) = a^4(2\pi)^4\delta_\mathrm{D}^3\left(\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}' - \boldsymbol{q}'\right)\delta_\mathrm{D}\left(p^0 + q^0 - p'^0 - q'^0\right) \tag{9.184}$$

となる．ここで式 (9.180) により

$$p^0 + q^0 - p'^0 - q'^0 \simeq p - p' + \frac{q^2 - q'^2}{2m_\mathrm{e}a} \tag{9.185}$$

となる．光子偏極で平均したトムソン散乱の不変散乱振幅 $|\mathscr{M}|^2$ は，式 (4.301) で

与えられる．光子の散乱角 θ は $\cos\theta = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}/pp'$ であるから，この場合は

$$|\mathscr{M}|^2 = 3\pi m_e{}^2\sigma_T\left[1+\left(\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}'}{pp'}\right)^2\right] \tag{9.186}$$

である．

以上の式 (9.182)–(9.186) を式 (9.178) へ代入することにより，衝突項は

$$\begin{aligned}\mathscr{C}_\gamma[f(\boldsymbol{p})] = \frac{3\pi^2\sigma_T}{a^4}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{d^3q'}{(2\pi)^3}\frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\frac{1}{p'}\left[1+\left(\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}'}{pp'}\right)^2\right]\\ \times\,\delta_D\left(p-p'+\frac{q^2-q'^2}{2m_e a}\right)(2\pi)^3\delta_D^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'+\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}')\\ \times\,\{f_\gamma(\boldsymbol{p}')f_e(\boldsymbol{q}')\,[1+f_\gamma(\boldsymbol{p})]-f_\gamma(\boldsymbol{p})f_e(\boldsymbol{q})\,[1+f_\gamma(\boldsymbol{p}')]\}\end{aligned} \tag{9.187}$$

と求められる．この式は本質的に式 (6.202) と同じであり，違いは運動量の規格化の違いによりスケール因子が現れることと，分布関数が一般に非等方な場合を含んでいることである．

トムソン散乱では，式 (6.203), (6.204) の前後で述べたように $\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'$ についてのテイラー展開によって近似的に衝突項を求めることができる．ここでは 1 次までの展開

$$\delta_D^3(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}'+\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}') \simeq \delta_D^3(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}')+(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{q}}\delta_D^3(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}') \tag{9.188}$$

を式 (9.187) へ代入して計算する．部分積分を行い，さらに表面積分となって消える項を落とせば，

$$\begin{aligned}\mathscr{C}_\gamma[f(\boldsymbol{p})] = \frac{3\pi^2\sigma_T}{a^4}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\frac{1}{p'}\left[1+\left(\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}'}{pp'}\right)^2\right]\\ \times\left[\delta_D(p-p')-\frac{\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')}{m_e a}\delta'(p-p')\right]f_e(\boldsymbol{q})\,[f_\gamma(\boldsymbol{p}')-f_\gamma(\boldsymbol{p})]\end{aligned} \tag{9.189}$$

という結果を得る．

ここで電子の分布関数についての積分を実行することができる．まず式 (9.182) に注意すると，

$$\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}f_e(\boldsymbol{q}) = a^3\int d\Pi_e P_e{}^0 f_e(\boldsymbol{P}) = \frac{1}{2}a^3 n_e \tag{9.190}$$

が得られる．ただし $P_e{}^0 \simeq m_e$ は一般座標における 4 元運動量の時間成分，すなわち電子のエネルギーを表し，さらに式 (6.8) により

$$n_{\mathrm{e}} = 2\int d\Pi_{\mathrm{e}} {P_{\mathrm{e}}}^0 f_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{P}) \tag{9.191}$$

は電子の数密度である．次に，電子の自由度が 2 であることと式 (7.335) により，

$$\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} q^i f_{\mathrm{e}}(\boldsymbol{q}) = \frac{1}{2} m_{\mathrm{e}} n_{\mathrm{e}} a^4 \left({v_{\mathrm{e}}}^i - B^i\right) \tag{9.192}$$

が得られる．ただし分布関数の背景成分は $\boldsymbol{q}$ の角度方向に依存しないから積分には寄与しないこと，さらに電子は非相対論的であるからそのエネルギー密度と圧力は $\bar{\rho}_{\mathrm{e}} \simeq m_{\mathrm{e}} n_{\mathrm{e}}$, $\bar{p}_{\mathrm{e}} \simeq 0$ を満たすことを用いた．また ${v_{\mathrm{e}}}^i$ は電子の速度場である．原子がイオン化しているとき，バリオン成分と電子はクーロン相互作用により強く結合するので，電子の速度場とバリオンの速度場 ${v_{\mathrm{b}}}^i$ は共通の値を持ち，

$${v_{\mathrm{e}}}^i = {v_{\mathrm{b}}}^i \tag{9.193}$$

が成り立つ．以下ではこのような場合を仮定する．

光子の分布関数を，背景成分と線形摂動成分に分けて $f_\gamma(\boldsymbol{p}) = \bar{f}_\gamma + \delta f_\gamma(p, \boldsymbol{n})$ とする．ただし $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{p}/p$ である．また分布関数の摂動成分は時刻や位置にも依存するが，記法の簡略化のため引数から省略している．式 (9.190), (9.192) を用いて式 (9.189) の $\boldsymbol{q}$ 積分を行い，さらに $\boldsymbol{p}' = p'\boldsymbol{n}'$ とおいて動径成分 p' の積分も実行すると，

$$\begin{aligned}\mathscr{C}_\gamma[f_\gamma(p, \boldsymbol{n})] = \frac{3 n_{\mathrm{e}} \sigma_{\mathrm{T}} p}{16\pi a} \int d\Omega_{n'} \left[1 + (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}')^2\right] \\ \times \left[\delta f_\gamma(p, \boldsymbol{n}') - \delta f_\gamma(p, \boldsymbol{n}) - \left({v_{\mathrm{b}}}^i - B^i\right) n_i p \frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p}\right]\end{aligned} \tag{9.194}$$

が得られる．ただし，線形近似により 2 次以上の摂動成分は無視した．ここからわかるように，衝突項には背景成分は含まれず，それ自身が摂動成分である．したがって，背景成分について

$$\bar{\mathscr{C}}_\gamma = 0 \tag{9.195}$$

が成り立ち，光子に対する背景成分のボルツマン方程式 (7.321) は，

$${\bar{f}_\gamma}{}' = 0 \tag{9.196}$$

となる．すなわち，光子の背景分布関数は時間的に一定である．これはトムソン散乱で光子数が変化しないからである．

衝突項の背景成分が消えることから，式 (7.346) のように与えられるゲージ不変な光子の衝突項 $\mathscr{C}_\gamma^{(\mathrm{GI})}$ は，そのまま式 (9.194) のスカラー型成分に等しい．ゲージ不変な分布関数は式 (7.344) のように与えられるが，光子は質量を持たないので

$$\delta f_\gamma^{(\mathrm{GI})} = \delta f_\gamma - \bar{f}_\gamma{}' \left(B^{(\mathrm{S})} + E^{(\mathrm{S})\prime}\right) - \left[\mathscr{H}\left(B^{(\mathrm{S})} + E^{(\mathrm{S})\prime}\right) + n^i \left(B^{(\mathrm{S})} + E^{(\mathrm{S})\prime}\right)_{,i}\right] p \frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p} \tag{9.197}$$

となる．ゲージ不変なバリオンの速度場は式 (7.257) により，

$$v_{\mathrm{b}}^{(\mathrm{GI})} = v_{\mathrm{b}}^{(\mathrm{S})} + E^{(\mathrm{S})\prime} \tag{9.198}$$

である．これらの式 (9.197), (9.198) を用いて，先ほど導いた衝突項の式 (9.194) に対する，ゲージ不変なスカラー型成分を書き直すと，

$$\begin{aligned}\delta\mathscr{C}_\gamma^{(\mathrm{GI})}[f_\gamma(p,\boldsymbol{n})] = \frac{3n_{\mathrm{e}}\sigma_{\mathrm{T}}p}{16\pi a} \int d\Omega_{n'} \left[1 + (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}')^2\right] \\ \times \left[\delta f_\gamma^{(\mathrm{GI})}(p,\boldsymbol{n}') - \delta f_\gamma^{(\mathrm{GI})}(p,\boldsymbol{n}) - v_{\mathrm{b},i}^{(\mathrm{GI})} n^i p \frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p}\right]\end{aligned} \tag{9.199}$$

が得られ，確かにこの衝突項はそのままゲージ不変量となっていることが明らかである．この衝突項により，ゲージ不変なボルツマン方程式 (7.345) は

$$\begin{aligned}&\delta f_\gamma^{(\mathrm{GI})\prime} + n^i \delta f_{\gamma,i}^{(\mathrm{GI})} - \left(n^i \Phi_{,i} + \Psi'\right) p \frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p} \\ &\quad = \frac{3an_{\mathrm{e}}\sigma_{\mathrm{T}}}{16\pi} \int d\Omega_{n'} \left[1 + (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}')^2\right] \left[\delta f_\gamma^{(\mathrm{GI})}(p,\boldsymbol{n}') - \delta f_\gamma^{(\mathrm{GI})}(p,\boldsymbol{n}) - n^i v_{\mathrm{b},i}^{(\mathrm{GI})} p \frac{\partial \bar{f}_\gamma}{\partial p}\right]\end{aligned} \tag{9.200}$$

となる．

ここで，次の変数

$$\Theta(\boldsymbol{n}) \equiv \frac{1}{4} \frac{\displaystyle\int dp\, p^3 \delta f_\gamma(p,\boldsymbol{n})}{\displaystyle\int dp\, p^3 \bar{f}_\gamma(p)} \tag{9.201}$$

を定義する．ただし，分布関数と同様，これは時空座標 $(\boldsymbol{x},\tau)$ にも依存するが，簡略化のため引数から省略している．この変数を**輝度関数** (brightness function) とい

う．分布関数が熱平衡状態に近い場合，この変数は光子温度のゆらぎに対応する量である．実際，熱平衡状態における分布関数

$$f_\gamma(p) = \frac{1}{\exp(p/T) - 1} \tag{9.202}$$

に小さな温度ゆらぎ δT があるとき，分布関数のゆらぎは

$$\delta f_\gamma(p) = -p\frac{\partial f_\gamma}{\partial p}\frac{\delta T}{T} \tag{9.203}$$

となり，これを式 (9.201) に代入して部分積分すると $\Theta = \delta T/T$ が導かれる．この輝度関数のゲージ不変量を

$$\begin{aligned}\Theta^{(\mathrm{GI})}(\boldsymbol{n}) &\equiv \frac{1}{4}\frac{\displaystyle\int dp\, p^3 \delta f_\gamma^{(\mathrm{GI})}(p, \boldsymbol{n})}{\displaystyle\int dp\, p^3 \bar{f}_\gamma(p)} \\ &= \Theta + \mathscr{H}\left(B^{(\mathrm{S})} + E^{(\mathrm{S})\prime}\right) + n^i\left(B^{(\mathrm{S})} + E^{(\mathrm{S})\prime}\right)_{,i}\end{aligned} \tag{9.204}$$

で定義する．ただし第 2 の等式を示すには式 (9.196), (9.197) を用いる．

光子の線形ボルツマン方程式 (9.200) を積分することにより，輝度関数に対する発展方程式は

$$\begin{aligned}&\Theta^{(\mathrm{GI})\prime}(\boldsymbol{n}) + n^i\Theta^{(\mathrm{GI})}_{,i}(\boldsymbol{n}) + n^i\Phi_{,i} + \Psi' \\ &\quad = \frac{3an_{\mathrm{e}}\sigma_{\mathrm{T}}}{16\pi}\int d\Omega_{n'}\left[1 + (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}')^2\right]\left[\Theta^{(\mathrm{GI})}(\boldsymbol{n}') - \Theta^{(\mathrm{GI})}(\boldsymbol{n}) + n^i v^{(\mathrm{GI})}_{\mathrm{b},i}\right]\end{aligned} \tag{9.205}$$

となる．右辺の角度積分を実行するため，積分されている輝度関数の角度依存性だけを球面調和関数で展開して

$$\Theta^{(\mathrm{GI})}(\boldsymbol{n}') = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}(-i)^l\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\,\Theta_l^{(m)}Y_l^m(\boldsymbol{n}') \tag{9.206}$$

とする．また式 (9.153) に示されたルジャンドル多項式の具体形を使うと

$$1 + (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}')^2 = \frac{4}{3}P_0(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}') + \frac{2}{3}P_2(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}') \tag{9.207}$$

と表される．ここでルジャンドル多項式は球面調和関数の加法定理 [式 (B.78)]

$$P_l(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}') = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_m Y_l^{m*}(\boldsymbol{n}')Y_l^m(\boldsymbol{n}) \tag{9.208}$$

によってさらに展開できる．これらの式 (9.206)-(9.208) を使って式 (9.205) の右辺を表し，さらに球面調和関数の直交関係 [式 (B.72)]

$$\int d\Omega_{n'} Y_l^{m*}(\boldsymbol{n}') Y_{l'}^{m'}(\boldsymbol{n}') = \delta_{ll'}\delta_{mm'} \tag{9.209}$$

を用いて変形する．その結果を平面波展開したフーリエ空間において表すと，空間微分は $n^i\partial_i \to i\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k} = ik\mu$ と置き換えられて

$$\begin{aligned}\Theta^{(\mathrm{GI})\prime}(\boldsymbol{n}) &+ ik\mu\Theta^{(\mathrm{GI})}(\boldsymbol{n}) + ik\mu\Phi + \Psi' \\ &= an_{\mathrm{e}}\sigma_{\mathrm{T}}\left[\Theta_0^{(0)} - \Theta^{(\mathrm{GI})}(\boldsymbol{n}) + ik\mu v_{\mathrm{b}}^{(\mathrm{GI})} - \frac{1}{5}\sqrt{\frac{\pi}{5}}\sum_m \Theta_2^{(m)} Y_2^m(\boldsymbol{n})\right]\end{aligned} \tag{9.210}$$

となる．ただし $\mu = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k}/k$ であり，また $\Theta^{(\mathrm{GI})}$, $\Theta_l^{(m)}$ の引数から省略されている空間 $\boldsymbol{x}$ への依存性は波数 $\boldsymbol{k}$ への依存性に変更される．この式が光子のゆらぎの発展方程式を与える．

ニュートリノの場合における式 (9.151) から式 (9.152) への考察と同様に，対称性から輝度関数の運動量に関する方向依存性は μ を通じてのみであると考えられる．そこで輝度関数にルジャンドル展開

$$\Theta^{(\mathrm{GI})}(\boldsymbol{n}) = \sum_{l=0}^{\infty}(-i)^l \Theta_l P_l(\mu) \tag{9.211}$$

を適用する．このとき式 (9.206) における多重極展開の係数 $\Theta_l^{(m)}$ は，式 (9.208), (9.209) を使って変形することにより

$$\Theta_l^{(m)} = i^l\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\int d\Omega_n Y_l^{m*}(\boldsymbol{n})\Theta^{(\mathrm{GI})}(\boldsymbol{n}) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\,\Theta_l Y_l^{m*}(\hat{\boldsymbol{k}}) \tag{9.212}$$

と表される．ただし $\hat{\boldsymbol{k}} \equiv \boldsymbol{k}/k$ であり，輝度関数には波数 $\boldsymbol{k}$ への依存性が記法上省略されていることに注意する．再び式 (9.208) を使うことにより，

$$\sum_m \Theta_l^{(m)} Y_l^m(\boldsymbol{n}) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\,\Theta_l P_l(\mu) \tag{9.213}$$

が示されるので，式 (9.210) は

$$\Theta^{(\mathrm{GI})\prime} + ik\mu\Theta^{(\mathrm{GI})} + ik\mu\Phi + \Psi' = an_{\mathrm{e}}\sigma_{\mathrm{T}}\left[\Theta_0 - \Theta^{(\mathrm{GI})} + ik\mu v_{\mathrm{b}}^{(\mathrm{GI})} - \frac{1}{10}\Theta_2 P_2(\mu)\right] \tag{9.214}$$

となる．この式自体は，球面調和関数を経由せずに式 (9.205) から直接ルジャンドル展開することによっても導かれる．この式は質量のないニュートリノの式 (9.151) に対応するものである．実際，上式の衝突項を落として $\Theta^{(\mathrm{GI})} \to F/4$ と置き換えれば式 (9.151) になる．

発展方程式 (9.214) の両辺をルジャンドル展開すれば，ルジャンドル展開係数の発展方程式が導かれる．質量のないニュートリノにおける式 (9.156) と同様に，低次の係数を巨視的流体変数で表せば，

$$\Theta_0 = \frac{1}{4}\delta_\gamma^{(\mathrm{GI})}, \qquad \Theta_1 = -kv_\gamma^{(\mathrm{GI})}, \qquad \Theta_2 = \frac{5k^2}{12}\Pi_\gamma^{(\mathrm{S})} \tag{9.215}$$

となる．さらに高次係数の満たす方程式は

$$\delta_\gamma^{(\mathrm{GI})\prime} - \frac{4}{3}k^2 v_\gamma^{(\mathrm{GI})} + 4\Psi' = 0 \tag{9.216}$$

$$v_\gamma^{(\mathrm{GI})\prime} + \frac{1}{4}\delta_\gamma^{(\mathrm{GI})} - \frac{k^2}{6}\Pi_\gamma^{(\mathrm{S})} + \Phi = an_\mathrm{e}\sigma_\mathrm{T}\left(v_\mathrm{b}^{(\mathrm{GI})} - v_\gamma^{(\mathrm{GI})}\right) \tag{9.217}$$

$$\Theta_2{}' + \frac{2k^2}{3}v_\gamma^{(\mathrm{GI})} + \frac{3k}{7}\Theta_3 = -\frac{9}{10}an_\mathrm{e}\sigma_\mathrm{T}\Theta_2 \tag{9.218}$$

$$\Theta_l{}' - k\left[\frac{l}{2l-1}\,\Theta_{l-1} - \frac{l+1}{2l+3}\,\Theta_{l+1}\right] = -an_\mathrm{e}\sigma_\mathrm{T}\Theta_l \qquad (l \geq 3) \tag{9.219}$$

となる．ニュートリノの場合と同様に，この連立微分方程式を数値的に解けば光子ゆらぎの時間発展を追うことができる．

次節で導くように，光子の偏極自由度を考慮する場合でも式 (9.216)–(9.219) とほとんど同様の階層方程式が成り立つ．とくに式 (9.216), (9.217), (9.219) の形は偏極自由度を考慮しても変更されず，そのまま成り立つ．唯一変更されるのは式 (9.218) であり，この式には偏極自由度に依存する項が追加される．

9.4.5 バリオン

次に，バリオン成分のゆらぎに対する発展方程式を導く．電子は，素粒子物理学の用語として厳密にはバリオンでないが，クーロン相互作用によって原子核と強く結合しているため，ここでの用語としてはバリオン成分の一部を構成するものと考える．光子とバリオン成分の間には，トムソン散乱を通じてエネルギーや運動量が輸送される．他の成分との間にエネルギーや運動量の輸送はない．このため，バリオン成分のエネルギー運動量テンソル $T_{\mathrm{b}}{}^{\mu}{}_{\nu}$ と光子のエネルギー運動量テンソル $T_\gamma{}^{\mu}{}_{\nu}$ を加え合わせたものが保存則

$$T_{\mathrm{b}\ \nu;\mu}^{\mu} + T_{\gamma}{}^{\mu}{}_{\nu;\mu} = 0 \tag{9.220}$$

を満たす．式 (9.194), (9.195) に導かれたように，トムソン散乱の衝突項には背景成分がないから，トムソン散乱による相互作用に関する限り，背景時空のエネルギー運動量テンソルはバリオン成分と光子で別々に保存則を満たす．すなわち，式 (7.273) がバリオン成分と光子について成立する．電子の対消滅以後は，バリオン成分が非相対論的流体として振る舞う．すなわち，バリオン成分の圧力 p_{b}，状態方程式パラメータ w_{b}，音速 c_{b}，非等方ストレス Π_{b} はすべてよい近似で無視できる．光子の圧力 p_γ とエネルギー密度 ρ_γ は $p_\gamma = \rho_\gamma/3$ を満たし，したがって $w_\gamma = c_\gamma{}^2 = 1/3$ となる．このとき式 (7.273) は，バリオン成分と光子のそれぞれについて，

$$\bar{\rho}_{\mathrm{b}}{}' = -3\mathscr{H}\bar{\rho}_{\mathrm{b}}, \qquad \bar{\rho}_\gamma{}' = -4\mathscr{H}\bar{\rho}_\gamma \tag{9.221}$$

となる．したがって，これを積分することにより

$$\bar{\rho}_{\mathrm{b}} \propto a^{-3}, \qquad \bar{\rho}_\gamma \propto a^{-4} \tag{9.222}$$

であることがわかる．

エネルギー運動量テンソルの発散に対する線形近似の式 (7.76), (7.77) を，バリオン成分と光子で別々に求めて線形摂動成分を取り出し，さらに式 (9.221) を用いて変形すると

$$\delta T_{\mathrm{b}}{}^{\mu}{}_{0;\mu} = -\bar{\rho}_{\mathrm{b}}\left[\delta_{\mathrm{b}}{}' + v^i_{\mathrm{b}|i} + C^i{}_i{}'\right] \tag{9.223}$$

$$\delta T_{\mathrm{b}}{}^{\mu}{}_{i;\mu} = \bar{\rho}_{\mathrm{b}}\left[(v_{\mathrm{b}\,i} - B_i)' + \mathscr{H}(v_{\mathrm{b}\,i} - B_i) + A_{|i}\right] \tag{9.224}$$

$$\delta T_\gamma{}^{\mu}{}_{0;\mu} = -\bar{\rho}_\gamma\left[\delta_\gamma{}' + \frac{4}{3}\left(v^i_{\gamma|i} + C^i{}_i{}'\right)\right] \tag{9.225}$$

$$\delta T_\gamma{}^{\mu}{}_{i;\mu} = \frac{4}{3}\bar{\rho}_\gamma\left[(v_{\gamma\,i} - B_i)' + \frac{1}{4}\delta_{\gamma|i} + \frac{1}{4}\Pi_\gamma{}^j{}_{i|j} + A_{,i}\right] \tag{9.226}$$

が得られる．この表式を，式 (9.220) から得られる

$$\delta T_{\mathrm{b}}{}^{\mu}{}_{\nu;\mu} = -\delta T_\gamma{}^{\mu}{}_{\nu;\mu} \tag{9.227}$$

に代入し，スカラー型成分をとったものを式 (7.256), (7.257) で定義される各成分のゲージ不変量で書き表し，さらに式 (9.221) を用いて変形する．以上の直線的な計算の結果，平面波展開したフーリエ空間において，

$$\delta_{\mathrm{b}}^{(\mathrm{GI})\prime} - k^2 v_{\mathrm{b}}^{(\mathrm{GI})} + 3\Psi' = -\frac{\bar{\rho}_\gamma}{\bar{\rho}_{\mathrm{b}}}\left(\delta_\gamma^{(\mathrm{GI})\prime} - \frac{4}{3}k^2 v_\gamma^{(\mathrm{GI})} + 4\Psi'\right) \tag{9.228}$$

$$v_{\mathrm{b}}^{(\mathrm{GI})\prime} + \mathscr{H} v_{\mathrm{b}}^{(\mathrm{GI})} + \Phi = -\frac{4}{3}\frac{\bar{\rho}_\gamma}{\bar{\rho}_{\mathrm{b}}}\left(v_\gamma^{(\mathrm{GI})\prime} + \frac{1}{4}\delta_\gamma^{(\mathrm{GI})} - \frac{k^2}{6}\Pi_\gamma^{(\mathrm{S})} + \Phi\right) \tag{9.229}$$

が得られる．これらの式における右辺括弧内は，それぞれ光子に対する階層方程式の最初の 2 式 (9.216), (9.217) の左辺と一致する．次節で示すように，これら 2 つの式は光子の偏極自由度を考慮しても変更を受けない．したがって，式 (9.228), (9.229) は

$$\delta_{\mathrm{b}}^{(\mathrm{GI})\prime} - k^2 v_{\mathrm{b}}^{(\mathrm{GI})} + 3\Psi' = 0 \tag{9.230}$$

$$v_{\mathrm{b}}^{(\mathrm{GI})\prime} + \mathscr{H} v_{\mathrm{b}}^{(\mathrm{GI})} + \Phi = -\frac{4}{3}\frac{\bar{\rho}_\gamma}{\bar{\rho}_{\mathrm{b}}} a n_{\mathrm{e}} \sigma_{\mathrm{T}}\left(v_{\mathrm{b}}^{(\mathrm{GI})} - v_\gamma^{(\mathrm{GI})}\right) \tag{9.231}$$

となる．これらがバリオンゆらぎの発展方程式である．

以上のようにして，コールド・ダークマター，ニュートリノ，光子，バリオンからなる諸成分のゆらぎの線形成長を与える発展方程式が得られた．これらの方程式は多数の連立微分方程式系になっているため，正確な解を解析的に得ることは難しく，一般には数値的に積分する必要がある．近似的な解析解は次章で導く．

9.5 光子の偏極自由度と発展方程式

9.5.1 偏極自由度に対する衝突項

前節では光子の偏極状態について平均して分布関数の発展を求めた．トムソン散乱過程は，偏極状態に依存する散乱確率を持つ．この節では，より正確な取り扱いとして，偏極状態を考慮した光子ゆらぎに対する発展方程式を導くことを考える．この目的のため，トムソン散乱によるストークス・パラメータの時間変化を表す式 (6.343)–(6.345) を用いる．強度を表すストークス・パラメータ I の時間発展は，直線偏光を表すストークス・パラメータ $Q_\pm$ の時間発展と独立ではない．すなわち，これら 3 つのストークス・パラメータはお互いに影響を及ぼし合いながら時間発展する．

背景時空における放射エネルギー密度を $\bar{\rho}_\gamma$ とする．ローレンツ-ヘビサイド単位系において，真空中の電場エネルギー密度は $\langle|\boldsymbol{E}|^2\rangle/2$ で与えられるので，式 (6.254) の強度に対応するストークス・パラメータ I の背景成分は，$I = 2\bar{\rho}_\gamma$ であ

る．背景時空において光子は平均的に偏極していないから，他のストークス・パラメータは $Q_\pm = V = 0$ となる．そこで，摂動成分を含めたストークス・パラメータを

$$I(\boldsymbol{n}) = 2\bar{\rho}_\gamma\,[1 + 4\Theta_{\rm I}(\boldsymbol{n})], \quad Q_\pm(\boldsymbol{n}) = 8\bar{\rho}_\gamma\Theta_{\rm Q}^\pm(\boldsymbol{n}), \quad V(\boldsymbol{n}) = 8\bar{\rho}_\gamma\Theta_{\rm V}(\boldsymbol{n}) \tag{9.232}$$

とおき，ストークス・パラメータの摂動 $\Theta_{\rm I}, \Theta_{\rm Q}^\pm, \Theta_{\rm V}$ を導入する．以下の計算では，これらのパラメータについて線形摂動項までを残す．ここに導入された $\Theta_{\rm I}$ は式 (9.201) で定義された輝度関数 Θ と同じものである．このことを確かめるには，光子の自由度 2 を考慮した放射エネルギー密度が式 (7.329) により

$$\rho_\gamma = -T_\gamma{}^0{}_0 = \frac{2}{a^4}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\,p\left(\bar{f}_\gamma + \delta f_\gamma\right) \tag{9.233}$$

となることを用いるとよい．実際，上式における運動量積分への単位立体角あたりの寄与が強度であることから，式 (9.201) で定義される輝度関数 Θ を用いて

$$I = \frac{2}{a^4(2\pi)^3}\int dp\,p^3\left(\bar{f}_\gamma + \delta f_\gamma\right) = 2\bar{\rho}_\gamma\,(1 + 4\Theta) \tag{9.234}$$

となり，輝度関数 Θ は式 (9.232) 第 1 式における $\Theta_{\rm I}$ の定義と一致する．すなわち，

$$\Theta_{\rm I}(\boldsymbol{n}) = \frac{1}{4}\,\frac{\displaystyle\int dp\,p^3\delta f_\gamma(p,\boldsymbol{n})}{\displaystyle\int dp\,p^3\bar{f}_\gamma(p)} \tag{9.235}$$

である．

電子の静止系における局所座標において，ストークス・パラメータの変化率は式 (6.343)-(6.345) で与えられる．これらの式に式 (9.232) を代入して線形摂動成分を取り出すと，

$$\left.\frac{d\Theta_{\rm I}(\boldsymbol{n})}{d\tau}\right|_{\rm T} = an_{\rm e}\sigma_{\rm T}\left[-\Theta_{\rm I}(\boldsymbol{n}) + \Theta_{\rm I0}^{(0)} - \frac{1}{5}\sqrt{\frac{\pi}{5}}\sum_m\left(\Theta_{\rm I2}^{(m)} - \sqrt{6}\,\Theta_{\rm E2}^{(m)}\right)Y_2^m(\boldsymbol{n})\right] \tag{9.236}$$

$$\left.\frac{d\Theta_{\rm Q}^\pm(\boldsymbol{n})}{d\tau}\right|_{\rm T} = an_{\rm e}\sigma_{\rm T}\left[-\Theta_{\rm Q}^\pm(\boldsymbol{n}) + \frac{1}{5}\sqrt{\frac{3\pi}{5}}\sum_m\left(\Theta_{\rm I2}^{(m)} - \sqrt{6}\,\Theta_{\rm E2}^{(m)}\right){}_{\pm2}Y_2^m(\boldsymbol{n})\right] \tag{9.237}$$

$$\left.\frac{d\Theta_{\rm V}(\boldsymbol{n})}{d\tau}\right|_{\rm T} = an_{\rm e}\sigma_{\rm T}\left[-\Theta_{\rm V}(\boldsymbol{n}) - i\sqrt{\frac{\pi}{3}}\sum_m\Theta_{\rm V1}^{(m)}Y_1^m(\boldsymbol{n})\right] \tag{9.238}$$

が得られる．ただし $d/d\tau = a\,d/dt$ を用いて単位共形時間あたりの変化率で表し，

さらに摂動ストークス・パラメータには（スピン）球面調和関数展開

$$\Theta_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{n}) = \sum_{l,m} (-i)^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\, \Theta^{(m)}_{\mathrm{I}\,l}\, Y^m_l(\boldsymbol{n}) \tag{9.239}$$

$$\Theta^{\pm}_{\mathrm{Q}}(\boldsymbol{n}) = \sum_{l,m} (-i)^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\, \Theta^{\pm(m)}_{\mathrm{Q}\,l}\; {}_{\pm2}Y^m_l(\boldsymbol{n}) \tag{9.240}$$

$$\Theta_{\mathrm{V}}(\boldsymbol{n}) = \sum_{l,m} (-i)^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\, \Theta^{(m)}_{\mathrm{V}\,l}\, Y^m_l(\boldsymbol{n}) \tag{9.241}$$

および

$$\Theta^{\pm(m)}_{\mathrm{Q}\,l} = \frac{\Theta^{(m)}_{\mathrm{E}\,l} \pm i\Theta^{(m)}_{\mathrm{B}\,l}}{\sqrt{2}} \tag{9.242}$$

を用いた．これらの展開係数は直交性関係 (B.72), (B.115) により

$$\Theta^{(m)}_{\mathrm{I}\,l} = i^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \int d\Omega_n\, Y^{m*}_l(\boldsymbol{n})\Theta_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{n}) \tag{9.243}$$

$$\Theta^{\pm(m)}_{\mathrm{Q}\,l} = i^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \int d\Omega_n\; {}_{\pm2}Y^{m*}_l(\boldsymbol{n})\Theta^{\pm}_{\mathrm{Q}}(\boldsymbol{n}) \tag{9.244}$$

$$\Theta^{(m)}_{\mathrm{V}\,l} = i^l \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \int d\Omega_n\, Y^{m*}_l(\boldsymbol{n})\Theta_{\mathrm{V}}(\boldsymbol{n}) \tag{9.245}$$

で与えられる．

上に導かれた衝突項の表式は，電子の静止系におけるものであるから，以下の取り扱いのためには一般の時空座標系へ戻した表式を求める必要がある．電子の静止系と一般の座標系は電子の速度によるローレンツ変換で結びついているから，その座標変換は摂動の 1 次の量である．すると 4 つのストークス・パラメータのうち，もともと背景成分を持たない 1 次の摂動量である 3 つの Q, U, V に対して座標変換を適用しても，その違いは摂動の 2 次の量になり，線形摂動の範囲では座標変換を受けない．一方，ストークス・パラメータ I は背景成分を持っているので，線形摂動の部分も座標変換を受ける．このパラメータ I は光の強度に対応する量であるから，光子エネルギーの 4 乗に比例する．したがって，座標変換に対する光子エネルギーの変換を求めればストークス・パラメータの線形摂動を一般座標で表すことができる．

一般の時空座標において，バリオンの速度を $v_{\mathrm{b}}{}^i$ とすると，その 4 元速度は式 (7.41) により

$$u_\mu = a\,(-1 - A,\ v_{\mathrm{b}i} - B_i) \tag{9.246}$$

である．また，一般の座標系における光子の 4 元運動量 P^μ を局所平坦時空の 4 脚場で展開し，

$$P^\mu = p^\alpha \mathrm{e}^\mu_{(\alpha)} \tag{9.247}$$

とする．ここで係数 p^α はこの 4 脚場 $\mathrm{e}^\mu_{(\alpha)}$ が張る局所平坦時空から見た光子の 4 元運動量である．4 脚場の具体形として式 (7.304) を用い，さらに E, n^i をそれぞれこの局所平坦時空における光子のエネルギーと進行方向を表す単位ベクトルとすれば，式 (7.314) において $q = aE, m = 0$ とおいた式である

$$P^0 = \frac{1}{a}(1 - A)E, \qquad P^i = \frac{1}{a}\left(n^i + B^i - C^i{}_j n^j\right)E \tag{9.248}$$

が成り立つ．式 (9.246), (9.248) を用いてバリオン静止系における光子のエネルギー $\tilde{E}$ を求めると，線形近似により

$$\tilde{E} = -u_\mu P^\mu = \left[1 - n^i\,(v_{\mathrm{b}i} - B_i)\right]E \tag{9.249}$$

が得られる．右辺は，ドップラー偏移と座標のずれが光子のエネルギーに影響を及ぼすことを表している．光子の強度 I はエネルギーの 4 乗に比例するので，一般座標系からバリオン静止系への変換は

$$\tilde{I} = I\left[1 - 4n^i\,(v_{\mathrm{b}i} - B_i)\right] \tag{9.250}$$

となる．したがって，対応するゆらぎ変数の変換は

$$\tilde{\Theta}_{\mathrm{I}} = \Theta_{\mathrm{I}} - n^i\,(v_{\mathrm{b}i} - B_i) \tag{9.251}$$

となる．この変換には，光子の進行方向に関する双極子成分しか含まれていないので，式 (9.236), (9.237) において $\Theta^{(0)}_{\mathrm{I0}}, \Theta^{(m)}_{\mathrm{I2}}$ の項は変換を受けない．したがって，式 (9.236) だけが座標変換の影響を受けて，

$$\left.\frac{d\Theta_{\mathrm{I}}}{d\tau}\right|_{\mathrm{T}} = a n_{\mathrm{e}} \sigma_{\mathrm{T}} \left[\Theta^{(0)}_{\mathrm{I0}} - \Theta_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{n}) + n^i\,(v_{\mathrm{b}i} - B_i) - \frac{1}{5}\sqrt{\frac{\pi}{5}}\sum_m \left(\Theta^{(m)}_{\mathrm{I2}} - \sqrt{6}\,\Theta^{(m)}_{\mathrm{E2}}\right) Y^m_2(\boldsymbol{n})\right] \tag{9.252}$$

と変更される．式 (9.237), (9.238) はそのまま一般の座標で成り立つ．

輝度関数の変化率はボルツマン方程式における衝突項として作用する．実際，

式 (9.252) を式 (9.210) の右辺と比べてみれば，その類似性は明らかである．ここで式 (9.210) に取り入れられていない偏極の効果として，ストークス・パラメータ $Q_\pm$ のゆらぎ $\Theta^{\pm(m)}_{\mathrm{Q2}}$ が $\Theta^{(m)}_{\mathrm{E2}}$ を通じて 4 重極成分 $l = 2$ に寄与する．

9.5.2 偏極自由度を含む発展方程式

一般的な線形ボルツマン方程式 (7.322) を，光子に適用して積分することにより，輝度関数 Θ_{I} についての方程式を求めることができる．輝度関数は式 (9.235) で定義される．光子が質量を持たないことと，大局的な空間曲率がゼロ ($K = 0$) の場合を考えていることに注意すれば，ゆらぎの空間依存性を平面波展開したフーリエ空間における発展方程式として，

$$\Theta_{\mathrm{I}}{}' + ik\mu\Theta_{\mathrm{I}} + ik\mu A + ik\mu n^i B_i + n^i n^j C_{ij}{}' = \left.\frac{d\Theta_{\mathrm{I}}}{d\tau}\right|_{\mathrm{T}} \tag{9.253}$$

が得られる．ただし $\mu = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k}/k$ である．ここで式 (7.102) で与えられる空間計量ゆらぎの SVT 分解を，

$$C_{ij} = \gamma_{ij}\left(D + \frac{1}{3}\triangle E^{(\mathrm{S})}\right) + E_{ij} \tag{9.254}$$

と表しておくと便利である．ただし，

$$E_{ij} = E^{(\mathrm{S})}{}_{|ij} - \frac{1}{3}\gamma_{ij}\triangle E^{(\mathrm{S})} + E^{(\mathrm{V})}{}_{(i|j)} + E^{(\mathrm{T})}{}_{ij} \tag{9.255}$$

と定義する．この変数 E_{ij} はトレースがゼロという性質を持つ．さらに方向ベクトル $\boldsymbol{n}$ の成分を極座標 (θ, ϕ) で表すと

$$n^1 = \frac{1}{2}\sin\theta\left(e^{i\phi} + e^{-i\phi}\right),\quad n^2 = -\frac{i}{2}\sin\theta\left(e^{i\phi} - e^{-i\phi}\right),\quad n^3 = \cos\theta \tag{9.256}$$

となる．因子 $n^i B_i, n^i n^j C_{ij}$ を成分ごとの和で表してから上の式を代入し，さらにその結果における角度依存性を式 (B.71) に与えられる球面調和関数 Y_l^m で書き表してから整理すると，

$$n^i B_i = -i\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\sum_{m=-1}^{1} B^{(m)} Y_1^m(\boldsymbol{n}) \tag{9.257}$$

$$n_i n_j C_{ij} = D + \frac{1}{3}\triangle E^{(\mathrm{S})} - \sqrt{\frac{4\pi}{5}}\sum_{m=-2}^{2} E^{(m)} Y_2^m(\boldsymbol{n}) \tag{9.258}$$

が得られる．ただし係数は

$$B^{(0)} = iB_3\,, \qquad B^{(\pm1)} = \mp\frac{i}{\sqrt{2}}(B_1 \mp iB_2)\,, \qquad E^{(0)} = -E_{33} \tag{9.259}$$

$$E^{(\pm1)} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}(E_{13} \mp iE_{23})\,, \qquad E^{(\pm2)} = -\frac{1}{\sqrt{6}}(E_{11} - E_{22} \mp 2iE_{12}) \tag{9.260}$$

である．同様に式 (9.252) に現れる項 $n^i v_{\mathrm{b}i}$ は

$$n^i v_{\mathrm{b}i} = -i\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\sum_{m=-1}^{1} v_{\mathrm{b}}^{(m)} Y_1^m(\boldsymbol{n}) \tag{9.261}$$

と表すことができて，その係数は

$$v_{\mathrm{b}}^{(0)} = iv_{\mathrm{b}3}\,, \quad v_{\mathrm{b}}^{(\pm1)} = \mp\frac{i}{\sqrt{2}}(v_{\mathrm{b}1} \mp iv_{\mathrm{b}2}) \tag{9.262}$$

である．式 (9.257), (9.258), (9.261) を式 (9.252), (9.253) へ代入することにより，輝度関数の発展方程式は，

$$\begin{aligned}
&\Theta_{\mathrm{I}}' + ik\mu\Theta_{\mathrm{I}} + ik\mu A + D' - \frac{k^2}{3}E^{(\mathrm{S})\prime} + k\mu\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\sum_{m=-1}^{1} B^{(m)} Y_1^m(\boldsymbol{n}) - \sqrt{\frac{4\pi}{5}}\sum_{m=-2}^{2} E^{(m)\prime} Y_2^m(\boldsymbol{n}) \\
&= an_{\mathrm{e}}\sigma_{\mathrm{T}}\Bigg[\Theta_{\mathrm{I}0}^{(0)} - \Theta_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{n}) - i\sqrt{\frac{4\pi}{3}}\sum_{m=-1}^{1}\left(v_{\mathrm{b}}^{(m)} - B^{(m)}\right) Y_1^m(\boldsymbol{n}) \\
&\qquad - \sqrt{\frac{4\pi}{5}}\sum_{m}\frac{\Theta_{\mathrm{I}2}^{(m)} - \sqrt{6}\,\Theta_{\mathrm{E}2}^{(m)}}{10} Y_2^m(\boldsymbol{n})\Bigg]
\end{aligned} \tag{9.263}$$

で与えられる．

他のストークス・パラメータのゆらぎ変数 $\Theta_{\mathrm{Q}}^{\pm}$, Θ_{V} は背景成分を持たないため，入射電子が静止していない一般の座標系でも，式 (9.237), (9.238) が線形近似の範囲でそのまま成り立つ．同じ理由により，それ自体が線形摂動である重力場も，線形近似の範囲で変数 $\Theta_{\mathrm{Q}}^{\pm}$, Θ_{V} とは結合しない．このため，衝突項以外の時間発展は，そのまま光子の進行経路に沿った変数の時間変化率で与えられる．その変化率はラグランジュ微分 $d/d\tau = \partial/\partial\tau + n^i\partial_i$ で与えられ，衝突項は式 (9.237), (9.238) で与えられるから，フーリエ空間における発展方程式は

$$\Theta_{\mathrm{Q}}^{\pm\prime}(\boldsymbol{n}) + ik\mu\Theta_{\mathrm{Q}}^{\pm}(\boldsymbol{n}) = an_{\mathrm{e}}\sigma_{\mathrm{T}}\left[-\Theta_{\mathrm{Q}}^{\pm}(\boldsymbol{n}) + \frac{1}{5}\sqrt{\frac{3\pi}{5}}\sum_{m}\left(\Theta_{\mathrm{I}2}^{(m)} - \sqrt{6}\,\Theta_{\mathrm{E}2}^{(m)}\right)\,{}_{\pm2}Y_2^m(\boldsymbol{n})\right] \tag{9.264}$$

$$\Theta_{\mathrm{V}}'(\boldsymbol{n}) + ik\mu\Theta_{\mathrm{V}}(\boldsymbol{n}) = an_{\mathrm{e}}\sigma_{\mathrm{T}}\left[-\Theta_{\mathrm{V}}(\boldsymbol{n}) - i\sqrt{\frac{\pi}{3}}\sum_{m}\Theta_{\mathrm{V}1}^{(m)}Y_1^m(\boldsymbol{n})\right] \tag{9.265}$$

となる*5.

ここで，回転偏光の成分に対応するストークス・パラメータ V の発展方程式 (9.265) は他の変数の発展方程式とは独立である．その理由は，トムソン散乱の過程で回転偏光が発生しないからである．ゆらぎの生成時に初期条件として回転偏光が存在しなければ，その後も回転偏光は生成されずにゼロのままとどまる．仮に初期条件に回転偏光があっても，他のゆらぎ変数の進化には影響を及ぼさないので，以下では回転偏光の自由度は考えない．

発展方程式 (9.263), (9.264) の係数には $\mu = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k}/k$ が含まれている．このため，これらの式から階層方程式を求めるには，波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ の方向 $\hat{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{k}/k$ を z 軸に選ぶと便利である．以下では，この特殊な座標系で展開したときの係数 $\Theta_{\mathrm{I}l}^{(m)}$, $\Theta_{\mathrm{Q}l}^{\pm(m)}$ の値を，一般の座標系で展開した係数と区別して，$\tilde{\Theta}_{\mathrm{I}l}^{(m)}$, $\tilde{\Theta}_{\mathrm{Q}l}^{\pm(m)}$ と表記することにする．この座標系では，方向 $\boldsymbol{n}$ に対する天頂角の余弦が，変数 μ に等しい．この座標系で評価した係数 $\tilde{\Theta}_{\mathrm{I}l}^{(m)}$, $\tilde{\Theta}_{\mathrm{Q}l}^{\pm(m)}$ についての階層方程式を得るには，式 (9.263) および式 (9.264) にそれぞれ $Y_l^{m*}(\boldsymbol{n})$ と ${}_{\pm2}Y_l^{m*}(\boldsymbol{n})$ をかけてから，式 (9.243), (9.244) を用いて方向 $\boldsymbol{n}$ の角積分を行う．このとき，変数 μ の現れる項については，式 (6.322) で $l_1 = 1$ として得られる恒等式

$$\cos\theta\,{}_sY_l^m(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{(l^2-m^2)(l^2-s^2)}{l^2(2l+1)(2l-1)}}\,{}_sY_{l-1}^m(\theta,\phi) - \frac{ms}{l(l+1)}\,{}_sY_l^m(\theta,\phi) + \sqrt{\frac{[(l+1)^2-m^2]\,[(l+1)^2-s^2]}{(l+1)^2(2l+3)(2l+1)}}\,{}_sY_{l+1}^m(\theta,\phi) \tag{9.266}$$

を用いて変形する．その結果，

*5　偏極自由度の時間発展がこうして単純に求められるのは線形近似のためである．非線形効果を含めれば，一般に偏極状態の時間発展も重力と結合する．この場合を記述するには，偏極の分布を表す相関行列を導入して，重力と結合した偏極自由度のボルツマン方程式を導く必要がある．

$$\tilde{\Theta}_{\mathrm{I}\,l}^{(m)\prime} - k\left[\frac{\sqrt{l^2-m^2}}{2l-1}\,\tilde{\Theta}_{\mathrm{I}\,l-1}^{(m)} - \frac{\sqrt{(l+1)^2-m^2}}{2l+3}\,\tilde{\Theta}_{\mathrm{I}\,l+1}^{(m)}\right] - kA\delta_{l1}\delta_{m0}$$
$$+ \frac{k}{3}B^{(0)}\delta_{l0}\delta_{m0} - \frac{k\sqrt{4-m^2}}{3}B^{(m)}\delta_{l2} + \left(D' - \frac{k^2}{3}E^{(\mathrm{S})\prime}\right)\delta_{l0}\delta_{m0} + E^{(m)\prime}\delta_{l2}$$
$$= an_{\mathrm{e}}\sigma_{\mathrm{T}}\left[\tilde{\Theta}_{\mathrm{I}0}^{(0)}\delta_{l0}\delta_{m0} - \tilde{\Theta}_{\mathrm{I}\,l}^{(m)} + \left(v_{\mathrm{b}}^{(m)} - B^{(m)}\right)\delta_{l1} + \frac{\tilde{\Theta}_{\mathrm{I}2}^{(m)} - \sqrt{6}\tilde{\Theta}_{\mathrm{E}2}^{(m)}}{10}\delta_{l2}\right] \quad (9.267)$$

および

$$\tilde{\Theta}_{\mathrm{Q}\,l}^{\pm(m)\prime} - k\left[\frac{\sqrt{(l^2-m^2)(l^2-4)}}{l(2l-1)}\,\tilde{\Theta}_{\mathrm{Q}\,l-1}^{\pm(m)} - \frac{\sqrt{[(l+1)^2-m^2](l-1)(l+3)}}{(l+1)(2l+3)}\,\tilde{\Theta}_{\mathrm{Q}\,l+1}^{\pm(m)}\right.$$
$$\left.\pm \frac{2im}{l(l+1)}\,\tilde{\Theta}_{\mathrm{Q}\,l}^{\pm(m)}\right] = -an_{\mathrm{e}}\sigma_{\mathrm{T}}\left[\tilde{\Theta}_{\mathrm{Q}\,l}^{\pm(m)} + \frac{\sqrt{3}}{10}\left(\tilde{\Theta}_{\mathrm{I}2}^{(m)} - \sqrt{6}\tilde{\Theta}_{\mathrm{E}2}^{(m)}\right)\delta_{l2}\right] \quad (9.268)$$

が得られる．ただし，スピン球面調和関数の性質 (6.298) により，$l<0$ に対して $\tilde{\Theta}_{\mathrm{I}\,l}^{(m)}=0$ であり，また $l<2$ に対して $\tilde{\Theta}_{\mathrm{Q}\,l}^{\pm(m)}=0$ である．ここで式 (9.242) により

$$\tilde{\Theta}_{\mathrm{E}\,l}^{(m)} = \frac{\tilde{\Theta}_{\mathrm{Q}\,l}^{+(m)} + \tilde{\Theta}_{\mathrm{Q}\,l}^{-(m)}}{\sqrt{2}}, \quad \tilde{\Theta}_{\mathrm{B}\,l}^{(m)} = \frac{\tilde{\Theta}_{\mathrm{Q}\,l}^{+(m)} - \tilde{\Theta}_{\mathrm{Q}\,l}^{-(m)}}{\sqrt{2}\,i} \quad (9.269)$$

であるから，上の階層方程式 (9.268) は次の 2 式

$$\tilde{\Theta}_{\mathrm{E}\,l}^{(m)\prime} - k\left[\frac{\sqrt{(l^2-m^2)(l^2-4)}}{l(2l-1)}\,\tilde{\Theta}_{\mathrm{E}\,l-1}^{(m)} - \frac{\sqrt{[(l+1)^2-m^2](l-1)(l+3)}}{(l+1)(2l+3)}\,\tilde{\Theta}_{\mathrm{E}\,l+1}^{(m)}\right.$$
$$\left.- \frac{2m}{l(l+1)}\,\tilde{\Theta}_{\mathrm{B}\,l}^{(m)}\right] = -an_{\mathrm{e}}\sigma_{\mathrm{T}}\left[\tilde{\Theta}_{\mathrm{E}\,l}^{(m)} + \frac{\sqrt{6}}{10}\left(\tilde{\Theta}_{\mathrm{I}2}^{(m)} - \sqrt{6}\tilde{\Theta}_{\mathrm{E}2}^{(m)}\right)\delta_{l2}\right] \quad (9.270)$$

$$\tilde{\Theta}_{\mathrm{B}\,l}^{(m)\prime} - k\left[\frac{\sqrt{(l^2-m^2)(l^2-4)}}{l(2l-1)}\,\tilde{\Theta}_{\mathrm{B}\,l-1}^{(m)} - \frac{\sqrt{[(l+1)^2-m^2](l-1)(l+3)}}{(l+1)(2l+3)}\,\tilde{\Theta}_{\mathrm{B}\,l+1}^{(m)}\right.$$
$$\left.+ \frac{2m}{l(l+1)}\,\tilde{\Theta}_{\mathrm{E}\,l}^{(m)}\right] = -an_{\mathrm{e}}\sigma_{\mathrm{T}}\tilde{\Theta}_{\mathrm{B}\,l}^{(m)} \quad (9.271)$$

と等価である．

式 (9.267), (9.270), (9.271) を連立させたものが偏極自由度を取り入れた光子の発展方程式である．この連立方程式をよく見ると，m の値が異なる成分はお互いに混ざり合わない．すなわち，異なる m に属する成分は発展方程式において独立なモードとなる．さらに $|m| \geq 3$ となるモードは，他の変数から完全に独立してい

るので，考える必要はない．

以下に，$m = 0, \pm1, \pm2$ に対応するモードが SVT 分解の成分になっていることを示す．そのためには，上の階層方程式を導く際に，波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ の方向を空間座標系の第 3 軸方向にとっていることに注意する．すると，実空間における空間微分の演算子は，フーリエ空間において $\nabla_i \to ik\delta_{i3}$, $\Delta \to -k^2$, $\Delta^{-1} \to -k^{-2}$ と置き換わる．すると式 (7.101) から

$$B^{(\mathrm{S})} = -\frac{i}{k}B_3\,, \qquad \left[B^{(\mathrm{V})}{}_i\right] = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9.272}$$

が得られる．式 (9.259) において B_i を $B^{(m)}$ について逆に解き，それを上の式に代入すると，

$$B^{(\mathrm{S})} = -\frac{1}{k}B^{(0)}\,, \qquad \left[B^{(\mathrm{V})}{}_i\right] = -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -i\left(B^{(+1)} - B^{(-1)}\right) \\ B^{(+1)} + B^{(-1)} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9.273}$$

となる．さらに $K = 0$ とおいた式 (7.108)-(7.110) および式 (9.254), (9.255) を用いると

$$E^{(\mathrm{S})} = -\frac{3}{2k^2}E_{33}\,, \quad \left[E^{(\mathrm{V})}{}_i\right] = -\frac{2i}{k}\begin{bmatrix} E_{13} \\ E_{23} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \left[E^{(\mathrm{T})}{}_{ij}\right] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} E_{11} - E_{22} & 2E_{12} & 0 \\ 2E_{12} & -E_{11} + E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{9.274}$$

が得られ，さらに式 (9.259), (9.260) を用いることにより

$$E^{(\mathrm{S})} = \frac{3}{2k^2}E^{(0)}, \qquad \left[E^{(\mathrm{V})}{}_i\right] = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\,k}\begin{bmatrix} -i\left(E^{(+1)} - E^{(-1)}\right) \\ E^{(+1)} + E^{(-1)} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9.275}$$

$$\left[E^{(\mathrm{T})}{}_{ij}\right] = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\begin{bmatrix} E^{(+2)} + E^{(-2)} & i\left(E^{(+2)} - E^{(-2)}\right) & 0 \\ i\left(E^{(+2)} - E^{(-2)}\right) & -\left(E^{(+2)} + E^{(-2)}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{9.276}$$

となる．式 (9.273), (9.275), (9.276) から明らかなように，いま考えている $\hat{\boldsymbol{z}} \parallel \hat{\boldsymbol{k}}$ となる座標系では，$m = 0$ のモードがスカラー型摂動成分，$m = \pm1$ のモードがべ

クトル型摂動成分，$m = \pm 2$ のモードがテンソル型摂動成分にそれぞれ対応している．このような m の値と SVT 分解の関係は，計量ゆらぎだけでなく速度場などの物理的なベクトル場やテンソル場についても同様である．

9.5.3 スカラー型摂動成分の発展方程式

ここではスカラー型摂動成分に着目する．この成分は $m = 0$ に対応することから，式 (9.271) で与えられる偏光 B モードの発展方程式は，他の摂動変数と独立になる．初期条件にスカラー型の偏光 B モードがないものとすれば，時間発展によってこのモードは生成されない．そこで，スカラー型摂動成分については輝度関数と偏光 E モードだけを考えればよい．その発展方程式は，式 (9.267), (9.270) において $m = 0$ としたもので与えられる．

上で扱った輝度関数 Θ_{I} は，ゲージ不変量ではない．スカラー型成分に対するゲージ不変な輝度関数は，式 (9.204) のように定義できる．フーリエ空間においてそれは，

$$\Theta^{(\mathrm{GI})} = \Theta_{\mathrm{I}} + \mathscr{H}\left(B^{(\mathrm{S})} + E^{(\mathrm{S})\prime}\right) + ik\mu\left(B^{(\mathrm{S})} + E^{(\mathrm{S})\prime}\right) \tag{9.277}$$

である．ただし，$\mu = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}/k$ は波数ベクトルに対する光子運動量の方向余弦である．対称性により，分布関数はゆらぎの波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ に軸対称な関数と考えたので，

$$\Theta^{(\mathrm{GI})}(\boldsymbol{n}) = \sum_{l=0}^{\infty}(-i)^l\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\,\Theta_l^{(\mathrm{GI})}Y_l^0(\boldsymbol{n}) = \sum_{l=0}^{\infty}(-i)^l\Theta_l^{(\mathrm{GI})}P_l(\mu) \tag{9.278}$$

と展開できる．球面調和関数もしくはルジャンドル多項式の直交性を用いると，式 (9.277) により，展開係数 $\Theta_l^{(\mathrm{GI})}$ に対して，

$$\Theta_l^{(\mathrm{GI})} = \tilde{\Theta}_{\mathrm{I}\,l}^{(0)} + \mathscr{H}\left(B^{(\mathrm{S})} + E^{(\mathrm{S})\prime}\right)\delta_{l0} - k\left(B^{(\mathrm{S})} + E^{(\mathrm{S})\prime}\right)\delta_{l1} \tag{9.279}$$

が成り立つ．式 (9.267) に $m = 0$ を代入してから，式 (7.148), (7.149), (7.257), (9.279) で与えられるゲージ不変量を用いて表すと，

$$\begin{aligned}&\Theta_l^{(\mathrm{GI})\prime} - k\left[\frac{l}{2l-1}\,\Theta_{l-1}^{(\mathrm{GI})} - \frac{l+1}{2l+3}\,\Theta_{l+1}^{(\mathrm{GI})}\right] + \Psi'\delta_{l0} - k\Phi\,\delta_{l1}\\&\quad = an_{\mathrm{e}}\sigma_{\mathrm{T}}\left[\Theta_0^{(\mathrm{GI})}\delta_{l0} - \Theta_l^{(\mathrm{GI})} - kv_{\mathrm{b}}^{(\mathrm{GI})}\delta_{l1} + \frac{1}{10}\left(\Theta_2^{(\mathrm{GI})} - \sqrt{6}\tilde{\Theta}_{\mathrm{E2}}^{(0)}\right)\delta_{l2}\right]\end{aligned} \tag{9.280}$$

となり，ゲージ不変な発展方程式が得られる．ただし，この式を導くのに式 (9.273),

(9.275) などによる関係 $B^{(0)} = -kB^{(S)}, v_b^{(0)} = -kv_b^{(S)}, E^{(0)} = -2k^2E^{(S)}/3$ も用いた．また，$l = 0$ に対する上の式において $\Theta_{-1}^{(GI)} \equiv 0$ とする．この発展方程式 (9.280) において，偏極自由度を表す変数 $\tilde{\Theta}_{E2}^{(0)}$ を除いたものは，前節で導いた式 (9.216)–(9.219) と等価である．式 (9.215) と同様に，低次の係数は巨視的流体変数と

$$\Theta_0^{(GI)} = \frac{1}{4}\delta_\gamma^{(GI)}, \qquad \Theta_1^{(GI)} = -kv_\gamma^{(GI)}, \qquad \Theta_2^{(GI)} = \frac{5k^2}{12}\Pi_\gamma^{(S)} \tag{9.281}$$

により関係している．

偏極自由度は背景成分を持たないので，そのままゲージ不変量である．また式 (9.279) により $\tilde{\Theta}_{I2}^{(0)} = \Theta_2^{(GI)}$ である．偏光 E モードのスカラー型成分を $\Theta_E^{(S)} \equiv \tilde{\Theta}_E^{(0)}$ と表すことにすると，式 (9.270) に $m = 0$ を代入したものは

$$\Theta_{El}^{(S)\prime} - k\left[\frac{\sqrt{l^2-4}}{2l-1}\,\Theta_{E\,l-1}^{(S)} - \frac{\sqrt{(l-1)(l+3)}}{2l+3}\,\Theta_{E\,l+1}^{(S)}\right] = -an_e\sigma_T\left[\Theta_{El}^{(S)} + \frac{\sqrt{6}}{10}\left(\Theta_2^{(GI)} - \sqrt{6}\Theta_{E2}^{(S)}\right)\delta_{l2}\right] \tag{9.282}$$

となり，これもゲージ不変な発展方程式である．ただし $l \geq 2$ であり，また $l = 2$ に対する式において $\Theta_{E1}^{(S)} \equiv 0$ とする．スカラー型摂動成分に対する光子ゆらぎのゲージ不変な発展方程式は，以上の式 (9.280), (9.282) により与えられる．

階層方程式 (9.280) における低次の式を分離して，巨視的流体変数で表すと，

$$\delta_\gamma^{(GI)\prime} - \frac{4k^2}{3}v_\gamma^{(GI)} + 4\Psi' = 0 \tag{9.283}$$

$$v_\gamma^{(GI)\prime} + \frac{1}{4}\delta_\gamma^{(GI)} - \frac{k^2}{6}\Pi_\gamma^{(S)} + \Phi = an_e\sigma_T\left(v_b^{(GI)} - v_\gamma^{(GI)}\right) \tag{9.284}$$

$$\Theta_2^{(GI)\prime} + \frac{2k^2}{3}v_\gamma^{(GI)} + \frac{3k}{7}\Theta_3^{(GI)} = -\frac{an_e\sigma_T}{10}\left(9\Theta_2^{(GI)} + \sqrt{6}\Theta_{E2}^{(S)}\right) \tag{9.285}$$

$$\Theta_l^{(GI)\prime} - k\left[\frac{l}{2l-1}\,\Theta_{l-1}^{(GI)} - \frac{l+1}{2l+3}\,\Theta_{l+1}^{(GI)}\right] = -an_e\sigma_T\Theta_l^{(GI)} \quad (l \geq 3) \tag{9.286}$$

が得られ，また式 (9.282) の低次の式を分離して表すと，

$$\Theta_{E2}^{(S)\prime} + \frac{\sqrt{5}\,k}{7}\Theta_{E3}^{(S)} = -\frac{an_e\sigma_T}{10}\left(\sqrt{6}\Theta_2^{(GI)} + 4\Theta_{E2}^{(S)}\right) \tag{9.287}$$

$$\Theta_{El}^{(S)\prime} - k\left[\frac{\sqrt{l^2-4}}{2l-1}\,\Theta_{E\,l-1}^{(S)} - \frac{\sqrt{(l-1)(l+3)}}{2l+3}\,\Theta_{E\,l+1}^{(S)}\right] = -an_e\sigma_T\Theta_{El}^{(S)} \quad (l \geq 3) \tag{9.288}$$

となる．これらの連立方程式系は，式 (9.283), (9.284) に含まれる変数 $\Phi, \Psi, v_b^{(GI)}$ を通じて，光子以外の成分に対するスカラー型摂動と結合している．

9.5.4 テンソル型摂動成分の発展方程式

次にテンソル型の摂動成分を考える．テンソル型摂動はそのままゲージ不変量であるから，ゲージ自由度について注意する必要はない．テンソル型成分は，発展方程式 (9.267), (9.270), (9.271) における $m = \pm 2$ のモードで与えられる．具体的には

$$\tilde{\Theta}_{\mathrm{I}2}^{(\pm 2)\prime} + \frac{\sqrt{5}k}{7}\tilde{\Theta}_{\mathrm{I}3}^{(\pm 2)} + E^{(\pm 2)\prime} = -\frac{an_{\mathrm{e}}\sigma_{\mathrm{T}}}{10}\left[9\tilde{\Theta}_{\mathrm{I}2}^{(\pm 2)} + \sqrt{6}\tilde{\Theta}_{\mathrm{E}2}^{(\pm 2)}\right] \tag{9.289}$$

$$\tilde{\Theta}_{\mathrm{I}l}^{(\pm 2)\prime} - k\left[\frac{\sqrt{l^2-4}}{2l-1}\tilde{\Theta}_{\mathrm{I}l-1}^{(\pm 2)} - \frac{\sqrt{(l-1)(l+3)}}{2l+3}\tilde{\Theta}_{\mathrm{I}l+1}^{(\pm 2)}\right] = -an_{\mathrm{e}}\sigma_{\mathrm{T}}\tilde{\Theta}_{\mathrm{I}l}^{(\pm 2)} \quad (l \geq 3) \tag{9.290}$$

および

$$\tilde{\Theta}_{\mathrm{E}2}^{(\pm 2)\prime} + \frac{5k}{21}\tilde{\Theta}_{\mathrm{E}3}^{(\pm 2)} \pm \frac{2k}{3}\tilde{\Theta}_{\mathrm{B}3}^{(\pm 2)} = -\frac{an_{\mathrm{e}}\sigma_{\mathrm{T}}}{10}\left[\sqrt{6}\tilde{\Theta}_{\mathrm{I}2}^{(\pm 2)} + 4\tilde{\Theta}_{\mathrm{E}2}^{(\pm 2)}\right] \tag{9.291}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Theta}_{\mathrm{E}l}^{(\pm 2)\prime} &- k\left[\frac{l^2-4}{l(2l-1)}\tilde{\Theta}_{\mathrm{E}l-1}^{(\pm 2)} - \frac{(l-1)(l+3)}{(l+1)(2l+3)}\tilde{\Theta}_{\mathrm{E}l+1}^{(\pm 2)}\right] \\ &\pm \frac{4k}{l(l+1)}\tilde{\Theta}_{\mathrm{B}l}^{(\pm 2)} = -an_{\mathrm{e}}\sigma_{\mathrm{T}}\tilde{\Theta}_{\mathrm{E}l}^{(\pm 2)} \quad (l \geq 3)\end{aligned} \tag{9.292}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\Theta}_{\mathrm{B}l}^{(\pm 2)\prime} &- k\left[\frac{l^2-4}{l(2l-1)}\tilde{\Theta}_{\mathrm{B}l-1}^{(\pm 2)} - \frac{(l-1)(l+3)}{(l+1)(2l+3)}\tilde{\Theta}_{\mathrm{B}l+1}^{(\pm 2)}\right] \\ &\mp \frac{4k}{l(l+1)}\tilde{\Theta}_{\mathrm{E}l}^{(\pm 2)} = -an_{\mathrm{e}}\sigma_{\mathrm{T}}\tilde{\Theta}_{\mathrm{B}l}^{(\pm 2)} \quad (l \geq 2)\end{aligned} \tag{9.293}$$

である．ここで $m = -2$ のモードの発展方程式は，$\tilde{\Theta}_{\mathrm{I}l}^{(-2)} \leftrightarrow \tilde{\Theta}_{\mathrm{I}l}^{(+2)}$, $\tilde{\Theta}_{\mathrm{E}l}^{(-2)} \leftrightarrow \tilde{\Theta}_{\mathrm{E}l}^{(+2)}$, $\tilde{\Theta}_{\mathrm{B}l}^{(-2)} \leftrightarrow -\tilde{\Theta}_{\mathrm{B}l}^{(+2)}$ と対応させることにより，$m = 2$ のモードと完全に同じ発展方程式を満たしている．したがって実際の数値計算では $m = 2$ のモードの発展方程式だけを解けば十分である．

上の連立方程式系は，式 (9.289) における変数 $E^{(\pm 2)}$ を通じて光子以外の成分に対するテンソル型摂動と結合する．この変数 $E^{(\pm 2)}$ は，式 (9.276) により計量のテンソル型摂動成分 $E^{(\mathrm{T})}{}_{ij}$ の線形結合で与えられ，その発展方程式は式 (7.141) で与えられる．式 (9.260) と同様にして，非等方応力テンソル Π_{ij} を $\hat{\boldsymbol{z}} \parallel \boldsymbol{k}$ の座標系におけるヘリシティ基底で表すと，

$$\Pi^{(\pm 2)} = -\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\Pi_{11} - \Pi_{22} \mp 2i\Pi_{12}\right) \tag{9.294}$$

となる．これはテンソル型摂動成分になっていて，式 (9.276) と同様に

$$\left[\Pi^{(\mathrm{T})}{}_{ij}\right] = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\begin{bmatrix} \Pi^{(+2)} + \Pi^{(-2)} & i\left(\Pi^{(+2)} - \Pi^{(-2)}\right) & 0 \\ i\left(\Pi^{(+2)} - \Pi^{(-2)}\right) & -\left(\Pi^{(+2)} + \Pi^{(-2)}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{9.295}$$

が成り立つ．したがって，計量ゆらぎに対するテンソル型成分の発展方程式 (7.141) は，

$$E^{(\pm 2)\prime\prime} + 2\mathscr{H}E^{(\pm 2)\prime} + k^2 E^{(\pm 2)} = 8\pi G a^2 \bar{p}\Pi^{(\pm 2)} \tag{9.296}$$

となる．右辺の非等方応力テンソルへは，光子やニュートリノが寄与する．

第10章

諸成分の線形進化

宇宙におけるゆらぎの進化は，宇宙論における観測量として重要な役割を持つ．前章で導いたゆらぎの発展方程式を解いて，具体的な密度ゆらぎの進化を求め，そこから観測量を予言することによって，宇宙論に関する基本的な理論を観測と比較することができるようになる．この章の前半では，発展方程式の近似的な解析解を求める．また，発展方程式を数値的に解くときには，初期条件として初期ゆらぎの性質を指定する必要があるため，初期ゆらぎの可能な性質について網羅的に調べておく．後半では，宇宙論における具体的な観測量として典型的な，宇宙マイクロ波背景放射と宇宙の大規模構造を取り上げる．線形理論に基づいて，これらの観測量を理論的に予言するために必要な具体的手法を述べる．

10.1　諸成分ゆらぎの近似的進化

この節では，前章で導いた諸成分ゆらぎの発展方程式に対する近似的な解を求めて，その振る舞いを調べる．以下では，ニュートリノの質量が十分小さい標準的な場合を考える．宇宙の構成成分として，コールド・ダークマター，質量の無視できるニュートリノ，光子，バリオンからなる 4 成分系を考える．

10.1.1　光子とバリオンの強結合近似

いま考えている 4 成分系において，無衝突成分であるダークマターとニュートリノについては，他の成分と直接の相互作用がないため重力の影響だけを受ける．一方，光子とバリオンはお互いにトムソン散乱により相互作用をする．宇宙の初期には電子の数密度 n_{e} が大きいため，発展方程式中で散乱確率を表す因子 $an_{\mathrm{e}}\sigma_{\mathrm{T}}$ が大きな値をとる．4.5 節で説明した散乱断面積の物理的な意味から，光子が単位時間あたりに電子と衝突する回数は $dN/dt = n_{\mathrm{e}}\sigma_{\mathrm{T}}$ である．対応する共形時間あたり

の回数にすれば $dt = ad\tau$ より $dN/d\tau = an_e\sigma_T$ となる．このことから，この因子の逆数

$$\tau_c \equiv \frac{1}{an_e\sigma_T} \tag{10.1}$$

は 1 つの光子が散乱されるのに必要な平均共形時間を表す．またこの量 τ_c は，共動距離で見た光子の平均自由行程にも等しい．トムソン散乱によって光子とバリオンが強く結合するとき，この量 τ_c は小さい量とみなすことができ，ゆらぎの波長に対する平均自由行程の比 $k\tau_c$ の高次項を近似的に無視することができる．このように $k\tau_c \ll 1$ とする近似を**強結合近似** (tight-coupling approximation) という*[1]．

以下ではスカラー型摂動成分に着目し，強結合近似を系統的に取り扱う．偏極を考慮した光子とバリオンの発展方程式の独立な組み合わせとして (9.283)–(9.288), (9.230), (9.231) を考える．この方程式系の中で，量 τ_c を含まないものは式 (9.230), (9.283) だけである．さらに，式 (9.284), (9.231) から τ_c を消去した式が導ける．これらの式は強結合近似によらずに成り立つ．これら τ_c の値に関係なく成り立つ式を変形すると，

$$\delta_\gamma^{(\mathrm{GI})\prime} - \frac{4}{3}k^2 v_\gamma^{(\mathrm{GI})} + 4\Psi' = 0 \tag{10.2}$$

$$\delta_\mathrm{b}^{(\mathrm{GI})\prime} - \frac{3}{4}\delta_\gamma^{(\mathrm{GI})\prime} - k^2\left(v_\mathrm{b}^{(\mathrm{GI})} - v_\gamma^{(\mathrm{GI})}\right) = 0 \tag{10.3}$$

$$v_\gamma^{(\mathrm{GI})\prime} + Rv_\mathrm{b}^{(\mathrm{GI})\prime} + R'v_\mathrm{b}^{(\mathrm{GI})} + \frac{1}{4}\delta_\gamma^{(\mathrm{GI})} - \frac{k^2}{6}\Pi_\gamma^{(\mathrm{S})} + (1+R)\Phi = 0 \tag{10.4}$$

が得られる．ただし，

$$R \equiv \frac{3}{4}\frac{\bar{\rho}_\mathrm{b}}{\bar{\rho}_\gamma} \tag{10.5}$$

という変数を導入した．式 (9.222) によりこの量は $R \propto a$ と時間変化するため，

$$\mathscr{H}R = R' \tag{10.6}$$

が成り立つ．バリオンと光子の混合流体に対する音速を c_s とすると，背景時空における光子とバリオンの圧力がそれぞれ $\bar{p}_\mathrm{b} = 0$, $\bar{p}_\gamma = \bar{\rho}_\gamma/3$ で与えられることと，式 (9.221) により，

*1 P. J. E. Peebles and J. T. Yu, *The Astrophysical Journal*, **162**, 815 (1970).

$$c_s{}^2 = \frac{\bar{p}_\gamma{}'}{\bar{\rho}_\gamma{}' + \bar{\rho}_b{}'} = \frac{1}{3}\frac{1}{1 + \bar{\rho}_b{}'/\bar{\rho}_\gamma{}'} = \frac{1}{3}\frac{1}{1+R} \tag{10.7}$$

が成り立つ．

量 τ_c を含む方程式は式 (9.231), (9.284)–(9.288) である．これらの式を変形すると，

$$v_b^{(GI)} - v_\gamma^{(GI)} = \tau_c\left(v_\gamma^{(GI)\prime} + \frac{1}{4}\delta_\gamma^{(GI)} - \frac{k^2}{6}\Pi_\gamma^{(S)} + \Phi\right) \tag{10.8}$$

$$\Theta_2^{(GI)} = -\frac{4}{3}\tau_c\left(\Theta_2^{(GI)\prime} + \frac{2}{3}k^2 v_\gamma^{(GI)} + \frac{3}{7}k\Theta_3^{(GI)} - \frac{\sqrt{6}}{4}\Theta_{E2}^{(S)\prime} - \frac{\sqrt{30}}{28}k\Theta_{E3}^{(S)}\right) \tag{10.9}$$

$$\Theta_l^{(GI)} = -\tau_c\left(\Theta_l^{(GI)\prime} - \frac{l}{2l-1}k\Theta_{l-1}^{(GI)} + \frac{l+1}{2l+3}k\Theta_{l+1}^{(GI)}\right) \qquad (l \geq 3) \tag{10.10}$$

$$\Theta_{E2}^{(S)} = \sqrt{\frac{2}{3}}\tau_c\left(\Theta_2^{(GI)\prime} + \frac{2}{3}k^2 v_\gamma^{(GI)} + \frac{3}{7}k\Theta_3^{(GI)} - \frac{3\sqrt{6}}{2}\Theta_{E2}^{(S)} - \frac{3\sqrt{30}}{14}k\Theta_{E3}^{(S)}\right) \tag{10.11}$$

$$\Theta_{El}^{(S)} = -\tau_c\left(\Theta_{El}^{(S)\prime} - \frac{\sqrt{l^2-4}}{2l-1}k\Theta_{El-1}^{(S)} + \frac{\sqrt{(l-1)(l+3)}}{2l+3}k\Theta_{El+1}^{(S)}\right) \quad (l \geq 3) \tag{10.12}$$

$$v_\gamma^{(GI)} - v_b^{(GI)} = \tau_c\left(R v_b^{(GI)\prime} + R' v_b^{(GI)} + R\Phi\right) \tag{10.13}$$

となる．ここで τ_c に比例する項をすべて右辺に配置し，さらに τ_c のかからない項は $\Theta_2^{(GI)}, \Theta_{E2}^{(S)}$ について形式的に解いた形に変形した．

10.1.2 強結合極限と音響振動

強結合の最低次の近似では $\tau_c = 0$ とおいてよい．この近似を以下では，強結合極限と呼ぶことにする．この場合には，式 (10.8)–(10.13) の右辺がすべてゼロになるから，

$$v_b^{(GI)} = v_\gamma^{(GI)}, \qquad \Theta_l^{(GI)} = 0, \qquad \Theta_{El}^{(S)} = 0 \qquad (l \geq 2) \tag{10.14}$$

となる．この極限ではバリオンと光子が完全に結合し，同じ速度で一体となって運動する．また光子の偏極は消える．バリオンとの頻繁な衝突によって光子の運動量分布が等方化し，等方的な分布の光子が散乱しても統計的に偏極が生じないためである．この関係式 (10.14) を式 (10.2)–(10.4) へ代入すると，

$$\delta_\gamma^{(\mathrm{GI})\prime} - \frac{4}{3}k^2 v_\gamma^{(\mathrm{GI})} + 4\Psi' = 0 \tag{10.15}$$

$$\delta_\mathrm{b}^{(\mathrm{GI})\prime} - \frac{3}{4}\delta_\gamma^{(\mathrm{GI})\prime} = 0 \tag{10.16}$$

$$v_\gamma^{(\mathrm{GI})\prime} + \frac{R'}{1+R} v_\gamma^{(\mathrm{GI})} + \frac{1}{4(1+R)} \delta_\gamma^{(\mathrm{GI})} + \Phi = 0 \tag{10.17}$$

が得られる．

2 成分間の相対的なエントロピー摂動は式 (7.285) で与えられる．これにならい，バリオン・光子間の相対的なエントロピー摂動を

$$S_{\mathrm{b}\gamma} = \delta_\mathrm{b}^{(\mathrm{GI})} - \frac{3}{4}\delta_\gamma^{(\mathrm{GI})} \tag{10.18}$$

で定義する．すると式 (10.16) は $S_{\mathrm{b}\gamma}' = 0$ と表される．すなわち，バリオン・光子間の相対的エントロピー摂動 $S_{\mathrm{b}\gamma}$ は，強結合極限で時間的に一定になる．もし初期条件において $S_{\mathrm{b}\gamma} = 0$ を満たすならば，その性質は時間発展しても保たれる．

式 (10.15), (10.17) から $v_\gamma^{(\mathrm{GI})}$ を消去すると，光子のゆらぎに対する 2 階微分方程式

$$\delta_\gamma^{(\mathrm{GI})\prime\prime} + \frac{R'}{1+R}\delta_\gamma^{(\mathrm{GI})\prime} + \frac{k^2}{3(1+R)}\delta_\gamma^{(\mathrm{GI})} = -\frac{4k^2}{3}\Phi - \frac{4R'}{1+R}\Psi' - 4\Psi'' \tag{10.19}$$

が得られる．この式はゆらぎの振動を表す方程式となっている．光子が脱結合して宇宙が晴れ上がるより以前には，光子とバリオンは強く結合して混合流体として振る舞い，ハッブル半径よりも短い波長のゆらぎは圧力を感じて振動を行う．この宇宙初期における振動現象を宇宙の**音響振動** (acoustic oscillations) という．式 (10.19) は，強結合極限における光子ゆらぎの音響振動を表す方程式である．以下では，この方程式の近似的な解析解を求めることを考える．

微分方程式 (10.19) の右辺は強制項と考えられる．また，左辺第 2 項は減衰項に対応する．さらに左辺第 3 項の係数は固有振動数を与えるが，この係数は時間変化する．すなわちこの式は，強制力が働き，振動数が徐々に変化する減衰調和振動子の微分方程式と同じ形をしている．実際には，計量ゆらぎに対応する変数 Φ, Ψ は光子のゆらぎと無関係ではない．だが，形式的に右辺を強制項とみなして近似的に微分方程式を解くことができる．これにより，音響振動の様子をある程度解析的に理解できる．

右辺の強制項は 2 階線形微分方程式の非斉次項となる．線形微分方程式の一般論により，非斉次微分方程式の一般解は，非斉次項を落とした斉次方程式の解により構成することができる．すなわち，2 階線形微分方程式の強制項を $F(\tau)$ とし，

斉次方程式に対する 2 つの独立解を $X_1(s), X_2(s)$ とするとき，もとの微分方程式の一般解は

$$X(\tau) = C_1X_1(\tau) + C_2X_2(\tau) + \int^{\tau} \frac{X_1(s)X_2(\tau) - X_1(\tau)X_2(s)}{X_1(s){X_2}'(s) - {X_1}'(s)X_2(s)} F(s)ds \tag{10.20}$$

で与えられる．ただし C_1, C_2 は積分定数である．したがって，式 (10.19) の一般解を得るには，右辺を落とした斉次方程式

$$\delta_\gamma^{(\mathrm{GI})\prime\prime} + \frac{R'}{1+R}\,\delta_\gamma^{(\mathrm{GI})\prime} + \frac{k^2}{3(1+R)}\,\delta_\gamma^{(\mathrm{GI})} = 0 \tag{10.21}$$

に対する 2 つの独立解 $X_1(\tau), X_2(\tau)$ を求めればよい．

式 (10.21) は，摩擦力や復元力が時間変化する減衰調和振動子の方程式と同じ形である．いま光子ゆらぎの振動の様子を調べるため，波数 k が十分大きい場合を考え，振動周期が変数 R の典型的な時間変化のスケールよりも十分短いとして，WKB 近似によりその解を求めることにする．ここで $R \propto a$ であるから，R の時間変化スケールは膨張の時間変化スケールと同程度である．まず，解の形を実関数 $A(\tau), B(\tau)$ により

$$\delta_\gamma^{(\mathrm{GI})} = A(\tau)e^{iB(\tau)} \tag{10.22}$$

とおく．WKB 近似の仮定により，振幅 $A(\tau)$ の時間変化は変数 $R(\tau)$ の時間変化と同じ程度であるとし，位相因子 $B(\tau)$ の時間変化はそれより十分に速いものとする．式 (10.22) を式 (10.21) へ代入し，WKB 近似によって A や R の時間微分に対する高次項を落とすことにより，

$$B'^2 = \frac{k^2}{3(1+R)}, \qquad \frac{2A'}{A} + \frac{B''}{B'} + \frac{R'}{1+R} = 0 \tag{10.23}$$

という 2 つの方程式が得られる．これらの方程式の解は初等的に求まり，

$$A \propto (1+R)^{-1/4}, \qquad B = \pm\frac{k}{\sqrt{3}}\int^{\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{1+R}} \tag{10.24}$$

が得られる．したがって，光子のゆらぎ $\delta_\gamma^{(\mathrm{GI})}$ に対する斉次方程式 (10.21) の独立な 2 つの実数解 X_1, X_2 は

$$X_1 = \frac{\cos kr_{\mathrm{s}}}{(1+R)^{1/4}}, \qquad X_2 = \frac{\sin kr_{\mathrm{s}}}{(1+R)^{1/4}} \tag{10.25}$$

で与えられる．ただし，

$$r_{\mathrm{s}}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^{\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{1+R}} = \int_0^{\tau} c_{\mathrm{s}}d\tau \tag{10.26}$$

は**音響ホライズン** (sound horizon) と呼ばれる量であり，宇宙の十分初期からある時刻 τ までの間に，音速が到達できる距離を表している．ここで等密度時の共形時間を $\tau_{\rm eq}$ として $a_{\rm eq} = a(\tau_{\rm eq})$, $R_{\rm eq} = R(\tau_{\rm eq})$ とおけば，$R \propto a$ であることから $y \equiv a/a_{\rm eq} = R/R_{\rm eq}$ となるので，式 (9.87), (10.6) より

$$R' = \mathscr{H}R = \frac{k_{\rm eq}}{\sqrt{2}}\sqrt{R_{\rm eq}\,(R + R_{\rm eq})} \tag{10.27}$$

が成り立つ．ただし $k_{\rm eq} = \mathscr{H}_{\rm eq} = \mathscr{H}(\tau_{\rm eq})$ は等密度時におけるハッブル半径に対応する波数である．この関係式を用いると式 (10.26) を初等的に積分することができ，

$$r_{\rm s}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{3}}\int_0^R \frac{dR}{R'\sqrt{1+R}} = \frac{2}{3k_{\rm eq}}\sqrt{\frac{6}{R_{\rm eq}}}\ln\left(\frac{\sqrt{1+R} + \sqrt{R+R_{\rm eq}}}{1 + \sqrt{R_{\rm eq}}}\right) \tag{10.28}$$

が得られる．

斉次方程式の WKB 解 (10.25) を一般解の式 (10.20) に代入することにより，微分方程式 (10.19) の近似的な一般解が求まり，

$$\begin{aligned}\delta_\gamma^{\rm (GI)}(\tau) = \frac{4}{(1+R)^{1/4}}\Biggl\{ & C_1 \cos\Bigl[kr_{\rm s}(\tau)\Bigr] + C_2 \sin\Bigl[kr_{\rm s}(\tau)\Bigr] \\ & - \frac{\sqrt{3}}{k}\int_0^\tau d\tau_1 \left[\frac{k^2}{3}\Phi(\tau_1) + \frac{R'(\tau_1)}{1+R(\tau_1)}\Psi'(\tau_1) + \Psi''(\tau_1)\right] \\ & \times [1 + R(\tau_1)]^{3/4}\sin\left[kr_{\rm s}(\tau) - kr_{\rm s}(\tau_1)\right]\Biggr\}\end{aligned} \tag{10.29}$$

となる．この式は WKB 近似を用いて導いたが，その近似が成り立たないような範囲へ外挿しても，より正確な数値計算から得られる結果とそれほど大きく異なることはないことが知られている*2．式 (10.29) の初期値 $\delta_\gamma^{\rm (GI)}(0)$ と微分の初期値 $\delta_\gamma^{\rm (GI)\prime}(0)$ に対して，式 (10.26) を使うと，積分定数 C_1, C_2 の値は

$$C_1 = \frac{1}{4}\delta_\gamma^{\rm (GI)}(0), \qquad C_2 = \frac{\sqrt{3}}{4k}\left[\delta_\gamma^{\rm (GI)\prime}(0) + \frac{k_{\rm eq}R_{\rm eq}}{4\sqrt{2}}\,\delta_\gamma^{\rm (GI)}(0)\right] \tag{10.30}$$

で与えられる．

4 成分系のくわしい初期条件は次節で調べるが，おおまかな近似として 9.3.2 項に与えた 2 成分系の近似によって初期条件を考えてみる．ニュートリノの寄

---

*2 W. Hu and N. Sugiyama, *Phys. Rev.* D **51**, 2599 (1995); *Astrophys. J.*, **444**, 489 (1995).

与を無視すれば，放射優勢期における式 (9.138) の第 4 式は $\delta_\gamma^{(\mathrm{GI})}$ に対応し，$y = a/a_{\mathrm{eq}} = R/R_{\mathrm{eq}}$ であることと式 (10.27) により $\delta^{(\mathrm{GI})}(0) = -2\Phi_{\mathrm{i}}$，$\delta^{(\mathrm{GI})\prime}(0) = k_{\mathrm{eq}} S_i/2\sqrt{2}$ となる．したがってこの近似では

$$C_1 = -\frac{1}{2}\Phi_{\mathrm{i}}, \qquad C_2 = \frac{\sqrt{6}}{16}\frac{k_{\mathrm{eq}}}{k}(S_{\mathrm{i}} - R_{\mathrm{eq}}\Phi_{\mathrm{i}}) \tag{10.31}$$

となる．とくに等曲率ゆらぎ $\Phi_{\mathrm{i}} = 0$ の場合には $C_1 = 0$ となる．また，R_{eq} は等密度時におけるバリオンと光子の密度比の程度であるが，それはこのときのバリオンとダークマターの密度比の程度でもある．その値は小さいので，断熱ゆらぎ $S_{\mathrm{i}} = 0$ の場合には $C_2 \ll C_1$ となる．つまり，おおまかには C_1 が断熱ゆらぎのモードを与え，C_2 が等曲率ゆらぎのモードを与えている．次節で示されるように，ここで無視しているニュートリノの寄与を考慮すると，上の式には 5% 程度の補正が加わる．

上の考察により，初期条件の種類によって振動の位相が異なることがわかる．この特徴は，観測によってゆらぎの初期条件を区別する手段となる．断熱ゆらぎの場合には，関数 $\cos kr_{\mathrm{s}}$ で表されるような振動をするから，波数が $k = m\pi/r_{\mathrm{s}}$ ($m = 1, 2, \ldots$) の条件を満たすゆらぎの振幅が大きくなる．逆に等曲率ゆらぎの場合には，関数 $\sin kr_{\mathrm{s}}$ で表されるような振動をするから，$k = (m - 1/2)\pi/r_{\mathrm{s}}$ のゆらぎの振幅が大きくなる．時刻を固定したゆらぎの振幅を表すパワースペクトルで見ると，波数 k の関数として周期的に山と谷が出現する．宇宙が晴れ上がって光子が脱結合すると，強結合近似が成り立たなくなり，音速 c_{s} が急速にゼロに近づくことによって，ゆらぎの音響振動が止まる．このときに脱結合した光子は宇宙を直進して，最終的に宇宙マイクロ波背景放射となり我々に届く．その温度ゆらぎを測定することにより，晴れ上がり時における光子ゆらぎを観測することができる．

強結合近似が成り立つ時期では，バリオンのゆらぎも光子のゆらぎとまったく同様に振る舞う．強結合極限では式 (10.18) のエントロピー摂動 $S_{\mathrm{b}\gamma}$ が時間的に一定であり，バリオンの密度ゆらぎは光子のゆらぎにより $\delta_{\mathrm{b}}^{(\mathrm{GI})} = 3\delta_\gamma^{(\mathrm{GI})}/4 + S_{\mathrm{b}\gamma}$ で与えられる．したがって，バリオンも光子と同様の音響振動をする．式 (10.18), (10.19) から $\delta_\gamma^{(\mathrm{GI})}$ を消去することにより，バリオンの音響振動を表す方程式を導けば，

$$\delta_{\mathrm{b}}^{(\mathrm{GI})\prime\prime} + \frac{R'}{1+R}\delta_{\mathrm{b}}^{(\mathrm{GI})\prime} + \frac{k^2}{3(1+R)}\delta_{\mathrm{b}}^{(\mathrm{GI})} = -k^2\Phi - \frac{3R'}{1+R}\Psi' - 3\Psi'' + \frac{k^2}{3(1+R)}S_{\mathrm{b}\gamma} \tag{10.32}$$

となる．右辺の非斉次項が多少異なることを除けば，この微分方程式は光子の音響

振動を記述する方程式 (10.19) とほとんど同じである．とくに非斉次項を落とした斉次方程式は完全に一致する．晴れ上がり後は強結合が成り立たなくなり，バリオンの圧力は急速に低下する．晴れ上がり前に光子との強結合によってバリオンのゆらぎが音響振動することを**バリオン音響振動** (baryon acoustic oscillations) といい，しばしば **BAO** と略される．晴れ上がり後の宇宙の質量密度はバリオンとダークマターによって担われているが，このうちバリオン成分に音響振動の痕跡が残される．その痕跡は質量密度の空間分布に対するパワースペクトルに残り，宇宙の大規模構造に観測される効果となって現れる．

10.1.3 光子の偏極と音響振動

次に，上に導いた強結合極限に対する高次補正を考える．式 (10.14) は $k\tau_\mathrm{c}$ に関する 0 次解である．そこから $k\tau_\mathrm{c}$ の 1 次補正の方程式を求めるには，この 0 次解を式 (10.8)-(10.13) の高次項である右辺に代入すればよい．その結果，

$$v_\mathrm{b}^{(\mathrm{GI})} = v_\gamma^{(\mathrm{GI})} + \tau_\mathrm{c}\left(v_\gamma^{(\mathrm{GI})\prime} + \frac{1}{4}\delta_\gamma^{(\mathrm{GI})} + \Phi\right) \tag{10.33}$$

$$\Theta_2^{(\mathrm{GI})} = -\frac{8}{9}\tau_\mathrm{c}k^2 v_\gamma^{(\mathrm{GI})}, \qquad \Theta_l^{(\mathrm{GI})} = 0 \qquad (l \geq 3) \tag{10.34}$$

$$\Theta_{\mathrm{E}2}^{(\mathrm{S})} = -\frac{2\sqrt{6}}{9}\tau_\mathrm{c}k^2 v_\gamma^{(\mathrm{GI})}, \quad \Theta_{\mathrm{E}l}^{(\mathrm{S})} = 0 \qquad (l \geq 3) \tag{10.35}$$

$$v_\gamma^{(\mathrm{GI})} = v_\mathrm{b}^{(\mathrm{GI})} + \tau_\mathrm{c}\left(Rv_\gamma^{(\mathrm{GI})\prime} + R' v_\gamma^{(\mathrm{GI})} + R\Phi\right) \tag{10.36}$$

が得られる．

式 (10.34) からわかるように，強結合近似の高次効果として，光子の非等方応力に対応する 4 重極成分 $\Theta_2^{(\mathrm{GI})} = 5k^2\Pi_\gamma^{(\mathrm{S})}/12$ が励起する．光子の速度場に対応する双極成分 $\Theta_1 = -kv_\gamma^{(\mathrm{GI})}$ の存在により，光子はトムソン散乱の間に自由運動する．計量や密度がゆらいでいる中で自由運動をすれば，運動量分布が非等方的になり，非等方応力が生まれて 4 重極成分を生み出す．そして，光子の運動量分布が非等方的であれば，トムソン散乱により光子に偏極成分が生まれ，式 (10.35) のように偏光 E モードの成分 $\Theta_{\mathrm{E}2}^{(\mathrm{S})}$ が $\Theta_2^{(\mathrm{GI})}$ と同じ程度の値で励起する．ここで

$$\Theta_{\mathrm{E}2}^{(\mathrm{S})} = -\frac{\sqrt{6}}{4}\Theta_2^{(\mathrm{GI})} \tag{10.37}$$

という関係があるので，式 (9.240), (9.242) から直線偏光のゆらぎ $\Theta_\mathrm{Q}^{\pm}$ に対する方向依存性を求めると，

$$\Theta_{\rm Q}^{\pm} = \frac{3\Theta_2^{\rm (GI)}}{8\sqrt{2}} \sin^2\theta \tag{10.38}$$

となる．ただし θ は光子の運動量と波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ の間の角である．

物質優勢期では，計量のゆらぎがほぼダークマターの密度ゆらぎによって決まるため，変数 Ψ は単調な時間変化をする．すると式 (10.2) により，光子の速度場に対応する双極成分 $v_\gamma^{\rm (GI)}$ は $\delta_\gamma^{\rm (GI)\prime}$ と同様の振動をする．すなわち双極成分 $v_\gamma^{\rm (GI)}$ の振動位相は単極成分 $\delta_\gamma^{\rm (GI)}$ の振動位相に比べて $\pi/2$ だけずれる．さらに式 (10.34) より，この双極成分の振動位相は 4 重極成分 $\Theta_2^{\rm (GI)}$ の振動位相と一致し，また式 (10.38) より，直線偏光のゆらぎとも位相が一致する．つまり，光子の密度ゆらぎと偏極のゆらぎは振動位相が $\pi/2$ だけずれていることがわかる．これはゆらぎの初期条件によらない帰結である．宇宙マイクロ波背景放射の観測によって，このことは現実の宇宙でも成り立っていることが確かめられている．

10.1.4 拡散減衰

上に述べた強結合近似の高次効果は，光子の自由運動中に生じるので比較的小スケールにおいて顕著な効果となる．光子とバリオンの結合が十分でなければ，光子が高密度領域から低密度領域へ洩れだすことにより，小スケールの密度ゆらぎを消し去る効果が生まれる．この効果をゆらぎの**拡散減衰** (diffusion damping) もしくは**シルク減衰** (Silk damping) という．この現象について，解析的な近似によって調べておく．

拡散減衰の振る舞いを調べるため，小スケールに注目する．小スケールでは音響振動の振動数が十分に大きい．そこで，音響振動よりもゆるやかに変化する関数 $R, \tau_{\rm c}, \Phi, \Psi$ の時間微分を近似的に無視する．このとき，式 (10.2) により

$$v_\gamma^{\rm (GI)} = \frac{3}{4k^2}\delta_\gamma^{\rm (GI)\prime} \tag{10.39}$$

が成り立つ．また，強結合近似の 1 次補正の式において，式 (10.33) を R 倍したものから式 (10.36) を引き，さらに式 (10.39) を用いると，

$$v_{\rm b}^{\rm (GI)} = v_\gamma^{\rm (GI)} + \frac{\tau_{\rm c} R}{4(1+R)}\delta_\gamma^{\rm (GI)} = \frac{3}{4k^2}\delta_\gamma^{\rm (GI)\prime} + \frac{\tau_{\rm c} R}{4(1+R)}\delta_\gamma^{\rm (GI)} \tag{10.40}$$

が成り立つ．さらに，式 (9.281), (10.34), (10.39) から，

$$\Pi_\gamma^{\rm (S)} = \frac{12}{5k^2}\Theta_2^{\rm (GI)} = -\frac{32\tau_{\rm c}}{15}v_\gamma^{\rm (GI)} = -\frac{8\tau_{\rm c}}{5}\delta_\gamma^{\rm (GI)\prime} \tag{10.41}$$

となる．これらの式を式 (10.4) へ代入すると，

$$\delta_\gamma^{(\mathrm{GI})\prime\prime} + \frac{k^2\tau_\mathrm{c}}{3(1+R)}\left(\frac{16}{15} + \frac{R^2}{1+R}\right)\delta_\gamma^{(\mathrm{GI})\prime} + \frac{k^2}{3(1+R)}\delta_\gamma^{(\mathrm{GI})} = -\frac{4k^2}{3}\Phi \tag{10.42}$$

が得られる．左辺第 2 項の τ_c に比例する項は強結合極限には現れない高次効果である．この項を除けば，強結合極限における音響振動の式 (10.19) においてゆっくり変化する変数の微分を落としたものに一致する．左辺第 2 項は音響振動に対する摩擦項の役割をする．強結合極限 $k\tau_\mathrm{c} = 0$ からのずれが大きいほど，この摩擦項の効果により振動が減衰する．

上の導出では，変数 Φ など宇宙時間のスケールでしか変化しない変数に対して，時間微分を無視する近似を用いた．同じ近似のもとで，変数

$$X(\tau) \equiv \delta_\gamma^{(\mathrm{GI})} + 4(1+R)\Phi \tag{10.43}$$

は式 (10.42) の斉次方程式

$$X'' + \frac{k^2\tau_\mathrm{c}}{3(1+R)}\left(\frac{16}{15} + \frac{R^2}{1+R}\right)X' + \frac{k^2}{3(1+R)}X = 0 \tag{10.44}$$

を満たす．この微分方程式を，1 回微分が含まれない標準形にするため，

$$[k_\mathrm{D}(\tau)]^{-2} \equiv \frac{1}{6}\int \frac{\tau_\mathrm{c}}{1+R}\left(\frac{16}{15} + \frac{R^2}{1+R}\right)d\tau \tag{10.45}$$

という量を定義し，

$$X = Y(\tau)e^{-k^2/k_\mathrm{D}{}^2} \tag{10.46}$$

とおく．ここで $2k^2/k_\mathrm{D}{}^2$ を共形時間で微分したものは式 (10.44) における左辺第 2 項の係数に等しいことに注意する．上の微分方程式を導出するときに R, τ_c の時間微分を無視し，さらに強結合近似において $k\tau_\mathrm{c}$ の 1 次で打ち切っている．ここでも整合的に同じ近似を用いると，方程式 (10.44) は

$$\frac{Y''}{Y} + \frac{k^2}{3(1+R)} = 0 \tag{10.47}$$

と簡単化する．この方程式は式 (10.21) において $R' = 0$ とした方程式と等価であり，WKB 解を同様に求めることができる．その独立解は式 (10.26) の音響ホライズン $r_\mathrm{s}(\tau)$ を用いて $Y \propto e^{\pm ikr_\mathrm{s}}$ となる．したがって，式 (10.42) の近似的な一般解は

$$\delta_\gamma^{(\mathrm{GI})} = -4(1+R)\Phi + C_1 e^{-k^2/k_\mathrm{D}{}^2}\cos kr_\mathrm{s} + C_2 e^{-k^2/k_\mathrm{D}{}^2}\sin kr_\mathrm{s} \tag{10.48}$$

である．ただし C_1, C_2 は積分定数である．式 (10.31) と同様の考察により，おお

まかに C_1 が断熱ゆらぎモードを与え，C_2 が等曲率ゆらぎモードを与える．ここで k_D よりも波数の大きな小スケールでは音響振動の振幅が大きく減衰することがわかる．つまり，拡散減衰が効果的になるスケールの波数が $k_D(\tau)$ で与えられる．

10.2 諸成分ゆらぎの初期条件

9.4 節に導かれた諸成分ゆらぎの発展方程式について，その解を具体的に求めるためには，初期条件が必要である．この節では，諸成分ゆらぎの初期条件について考察する．

宇宙の時間をずっと初期に遡れば放射優勢期となる．さらに，現在の我々が観測しているゆらぎの波長は，初期宇宙の極限で当時のハッブル半径よりも十分に大きい．そこで，諸成分ゆらぎの初期条件は，放射優勢期の超ハッブル・スケールにおいて与えればよい．ゆらぎの波長がハッブル半径内に入った後は，ゆらぎの正確な時間発展を解析的に求めることが難しく，数値的に解く必要がある．だが，超ハッブル・スケールにおける漸近的な振る舞いについては，解析的に与えることができる．その漸近解を用いることで，可能なゆらぎの初期条件を分類することができる．

10.2.1 超ハッブル・スケールにおけるゆらぎの発展方程式

ここでは，超ハッブル・スケールかつ放射優勢期の極限をとり，宇宙初期におけるゆらぎの発展方程式を解析的に解く．発展方程式は多数の連立方程式となっているが，共形時間に関する級数解の方法によって，この極限における漸近的な解を任意次数の近似で求めることができる．以下では簡単のため，最低次の近似解だけを考える．

初期宇宙におけるフリードマン方程式は，曲率項と宇宙項を落とした式 (9.70)，すなわち，

$$\mathscr{H}^2 = \frac{8\pi G}{3}a^2\bar{\rho} \tag{10.49}$$

で与えられる．さらに十分初期の放射優勢期においては式 (9.21) が成り立ち，とくに

$$\mathscr{H} = \frac{1}{\tau} \tag{10.50}$$

となる．

まず，いま考えている極限において，発展方程式の漸近的な形を導いておく．超ハッブル・スケールの極限 $k\tau \ll 1$ を考えることにより，発展方程式において k^2 に比例する項は無視できる．コールド・ダークマターの発展方程式 (9.141), (9.142) は，上の極限をとることにより

$$\delta_{\rm c}^{\rm (GI)\prime} + 3\Psi' = 0, \qquad v_{\rm c}^{\rm (GI)\prime} + \frac{1}{\tau} v_{\rm c}^{\rm (GI)} + \Phi = 0 \tag{10.51}$$

となる．ニュートリノの発展方程式は式 (9.158)–(9.161) で与えられる．ここで式 (9.161) を繰り返し用いると，F_{l+2} は $(k\tau)^l F_2$ 程度の量であることがわかる．したがって，超ハッブル・スケール $k\tau \ll 1$ では $l \geq 3$ に対する F_l が十分小さい．こうしてニュートリノの発展方程式の極限は

$$\delta_\nu^{\rm (GI)\prime} + 4\Psi' = 0, \qquad v_\nu^{\rm (GI)\prime} + \frac{1}{4}\delta_\nu^{\rm (GI)} + \Phi = 0, \qquad \Pi_\nu^{\rm (S)\prime} + \frac{8}{5} v_\nu^{\rm (GI)} = 0 \tag{10.52}$$

の 3 つの式で与えられる．また，十分初期の宇宙では強結合極限がよい近似となるので，式 (10.14) により

$$v_{\rm b}^{\rm (GI)} = v_\gamma^{\rm (GI)} \tag{10.53}$$

が成り立ち，$l \geq 2$ に対する高次の変数 $\Theta_l^{\rm (GI)}$, $\Theta_{{\rm E}l}^{\rm (S)}$ は無視できる．さらに光子とバリオンの発展方程式は (10.15)–(10.17) で与えられる．式 (10.6), (10.50) を用いると，これらの式の極限は

$$\delta_\gamma^{\rm (GI)\prime} + 4\Psi' = 0, \qquad \delta_{\rm b}^{\rm (GI)\prime} - \frac{3}{4}\delta_\gamma^{\rm (GI)\prime} = 0 \tag{10.54}$$

$$v_\gamma^{\rm (GI)\prime} + \frac{R}{1+R}\frac{v_\gamma^{\rm (GI)}}{\tau} + \frac{1}{4(1+R)}\delta_\gamma^{\rm (GI)} + \Phi = 0 \tag{10.55}$$

である．速度場が $\tau \to 0$ で発散することはないので，ほぼ $v_\gamma^{\rm (GI)\prime} \sim v_\gamma^{\rm (GI)}/\tau$ と振る舞う．このことと $R \ll 1$ を用いると，式 (10.55) は

$$v_\gamma^{\rm (GI)\prime} + \frac{1}{4}\delta_\gamma^{\rm (GI)} + \Phi = 0 \tag{10.56}$$

と近似できる．速度場と非等方応力の発展方程式である式 (10.51) 第 2 式，式 (10.52) 第 2, 3 式および式 (10.53), (10.56) を積分形で表すと，

$$v_{\rm c}^{\rm (GI)} = -\frac{1}{\tau}\int \tau\Phi d\tau, \qquad v_{\rm b}^{\rm (GI)} = v_\gamma^{\rm (GI)} = -\int \left(\frac{1}{4}\delta_\gamma^{\rm (GI)} + \Phi\right) d\tau \tag{10.57}$$

$$v_\nu^{\rm (GI)} = -\int \left(\frac{1}{4}\delta_\nu^{\rm (GI)} + \Phi\right) d\tau, \qquad \Pi_\nu^{\rm (S)} = -\frac{8}{5}\int v_\nu^{\rm (GI)} d\tau \tag{10.58}$$

となる．

アインシュタイン方程式の独立な組 (7.158)-(7.161) のうち，最初の 2 つは上に与えた諸成分ゆらぎの発展方程式に含まれている．発展方程式と独立な式は (7.160), (7.161) である．モード分解により $\Delta \to -k^2$ と置き換え，式 (10.49), (10.50) を用いてから超ハッブル・スケールでは無視できる $k^2/\mathscr{H}^2$ を落とし，さらに放射優勢期の状態方程式 $w = 1/3$ を代入すると，

$$v^{(\mathrm{GI})} = \frac{\tau}{4}\delta^{(\mathrm{GI})}, \qquad \Phi + \Psi = -\frac{1}{\tau^2}\Pi^{(\mathrm{S})} \tag{10.59}$$

が得られる．上に導いた式と独立ではないが，式 (7.155) の放射優勢期における漸近形は，

$$\Phi - \tau\Psi' = -\frac{2}{\tau}v^{(\mathrm{GI})} \tag{10.60}$$

となる．また，式 (7.225) の曲率ゆらぎ ζ は放射優勢期の極限で

$$\zeta = \Psi + \frac{\tau}{2}\Psi' - \frac{1}{2}\Phi \tag{10.61}$$

で与えられる．

アインシュタイン方程式に現れる非等方応力 $\Pi^{(\mathrm{S})}$ には，非相対論的成分であるコールド・ダークマターとバリオンは寄与しない．また前節で示されたように，超ハッブル・スケールでは強結合極限が成り立って光子の運動量は等方化されるので，光子も非等方応力に寄与しない．ニュートリノは十分初期に脱結合するので，そのような等方化はされずに運動量が非等方的になる．このため非等方応力にはニュートリノ成分だけが寄与し，式 (7.263) を用いると

$$\Pi^{(\mathrm{S})} = \frac{\bar{p}_\nu}{\bar{p}}\Pi_\nu^{(\mathrm{S})} = R_\nu \Pi_\nu^{(\mathrm{S})} \tag{10.62}$$

となる．ただし $\bar{p} = \bar{\rho}/3$, $\bar{p}_\nu = \bar{\rho}_\nu/3$ であり，また R_ν は全エネルギー密度に対するニュートリノの寄与の割合

$$R_\nu = \frac{\bar{\rho}_\nu}{\bar{\rho}} = \frac{\bar{\rho}_\nu}{\bar{\rho}_\gamma + \bar{\rho}_\nu} \tag{10.63}$$

を表す．この量 R_ν は時間的に一定で，その具体的な値は上式に式 (2.144) を代入することによって求められ，

$$R_\nu = \left[1 + \frac{8}{7}\left(\frac{11}{4}\right)^{4/3} \frac{1}{N_\nu^{\text{eff}}}\right]^{-1} \simeq 0.409 \tag{10.64}$$

である．式 (10.59) 第 2 式と式 (10.62) により，

$$\Phi + \Psi = -\frac{R_\nu}{\tau^2} \Pi_\nu^{(\mathrm{S})} \tag{10.65}$$

が得られる．

9.3 節で述べた 2 成分系の場合は，ゲージ不変ポテンシャル Φ の値とエントロピー摂動 S の値が放射優勢期で時間的に一定となるため，この 2 つの値のあるなしにより初期条件を断熱ゆらぎと等曲率ゆらぎの 2 つのモードに分類できた．ここで考える 4 成分系でも同様であるが，成分間の差で定義されるエントロピー摂動が複数考えられるため，等曲率ゆらぎに対応する初期条件が 1 種類だけではなくなり，さらに細分化された種類が考えられる．

いま考えている 4 成分系において，式 (7.285) のように定義される成分 ab 間のエントロピー摂動

$$S_{ab} = \frac{\delta_a}{1 + w_a} - \frac{\delta_b}{1 + w_b} \tag{10.66}$$

には 3 種類の独立な組み合わせがある．このエントロピー摂動がゲージ不変であるのは，成分間にエネルギー輸送がなく式 (7.273) が成り立つときであった．トムソン散乱において運動量は輸送されるが，エネルギーは輸送されないため，いま考えている系でもこれは成り立っている．光子を基準とする相対エントロピー摂動は

$$S_{\mathrm{c}\gamma} = \delta_{\mathrm{c}}^{(\mathrm{GI})} - \frac{3}{4}\delta_\gamma^{(\mathrm{GI})}, \qquad S_{\mathrm{b}\gamma} = \delta_{\mathrm{b}}^{(\mathrm{GI})} - \frac{3}{4}\delta_\gamma^{(\mathrm{GI})}, \qquad S_{\nu\gamma} = \frac{3}{4}\delta_\nu^{(\mathrm{GI})} - \frac{3}{4}\delta_\gamma^{(\mathrm{GI})} \tag{10.67}$$

で与えられる．式 (10.51), (10.52), (10.54) を用いると，上に導入した 3 つの相対エントロピー摂動は

$$S_{\mathrm{c}\gamma}' = S_{\nu\gamma}' = S_{\mathrm{b}\gamma}' = 0 \tag{10.68}$$

を満たし，いま考えている極限ではすべて時間的に一定である．

光子を基準にした相対エントロピー摂動の代わりに，放射成分全体の密度ゆらぎ

$$\delta_{\mathrm{r}}^{(\mathrm{GI})} \equiv \frac{\bar{\rho}_\nu \delta_\nu^{(\mathrm{GI})} + \bar{\rho}_\gamma \delta_\gamma^{(\mathrm{GI})}}{\bar{\rho}_{\mathrm{r}}} = R_\nu \delta_\nu^{(\mathrm{GI})} + (1 - R_\nu)\,\delta_\gamma^{(\mathrm{GI})} \tag{10.69}$$

を基準にした相対エントロピー摂動

$$S_\mathrm{c} \equiv \delta_\mathrm{c}^{(\mathrm{GI})} - \frac{3}{4}\delta_\mathrm{r}^{(\mathrm{GI})}, \qquad S_\mathrm{b} \equiv \delta_\mathrm{b}^{(\mathrm{GI})} - \frac{3}{4}\delta_\mathrm{r}^{(\mathrm{GI})}, \qquad S_\nu \equiv \frac{3}{4}\delta_\nu^{(\mathrm{GI})} - \frac{3}{4}\delta_\mathrm{r}^{(\mathrm{GI})} \tag{10.70}$$

を定義する．このとき，式 (10.69), (10.70) により

$$\delta_\mathrm{c}^{(\mathrm{GI})} = \frac{3}{4}\delta_\nu^{(\mathrm{GI})} + S_\mathrm{c} - S_\nu, \quad \delta_\mathrm{b}^{(\mathrm{GI})} = \frac{3}{4}\delta_\nu^{(\mathrm{GI})} + S_\mathrm{b} - S_\nu, \quad \delta_\gamma^{(\mathrm{GI})} = \delta_\nu^{(\mathrm{GI})} - \frac{4}{3}\frac{S_\nu}{1 - R_\nu} \tag{10.71}$$

という関係式が成り立つ．

式 (10.70) の変数は式 (10.67) の光子を基準にした相対エントロピー摂動でも表すことができ，

$$S_\mathrm{c} = S_{\mathrm{c}\gamma} - R_\nu S_{\nu\gamma}, \qquad S_\mathrm{b} = S_{\mathrm{b}\gamma} - R_\nu S_{\nu\gamma}, \qquad S_\nu = (1 - R_\nu) S_{\nu\gamma} \tag{10.72}$$

および

$$S_{\mathrm{c}\gamma} = S_\mathrm{c} + \frac{R_\nu S_\nu}{1 - R_\nu}, \qquad S_{\mathrm{b}\gamma} = S_\mathrm{b} + \frac{R_\nu S_\nu}{1 - R_\nu}, \qquad S_{\nu\gamma} = \frac{S_\nu}{1 - R_\nu} \tag{10.73}$$

という関係がある．式 (10.68), (10.72) により

$$S_\mathrm{c}{}' = S_\mathrm{b}{}' = S_\nu{}' = 0 \tag{10.74}$$

が成り立つ．超ハッブル・スケールにおいて時間的に保存するこれら 3 つの量の値によって，初期条件のモードを分類することができる．

10.2.2 断熱ゆらぎ

まず，もっとも簡単な初期条件として，

$$S_\mathrm{c} = S_\mathrm{b} = S_\nu = 0 \tag{10.75}$$

となるモードを考える．このときは，式 (10.73) により，

$$S_{\mathrm{c}\gamma} = S_{\mathrm{b}\gamma} = S_{\nu\gamma} = 0 \tag{10.76}$$

となり，相対エントロピー摂動はすべてゼロである．ここで曲率ゆらぎ ζ が $\tau \to 0$ の極限でゼロでない値を持てば，これは断熱ゆらぎに対応するモードである．単純な単一場によるインフレーション理論では，この型の初期ゆらぎが生成される．また現在のところ観測とも非常によく合っているため，このモードはゆらぎの標準的な初期条件であるとみなされている．このとき，式 (10.71) により

$$\delta_c^{(GI)} = \delta_b^{(GI)} = \frac{3}{4}\delta_\nu^{(GI)} = \frac{3}{4}\delta_\gamma^{(GI)} \tag{10.77}$$

となる．この式と式 (7.260) により，全成分の密度ゆらぎに対応する $\delta^{(GI)}$ を放射優勢期の極限で求めると，

$$\delta^{(GI)} = \delta_\gamma^{(GI)} \tag{10.78}$$

となる．この式と式 (10.59) 第 1 式より

$$v^{(GI)} = \frac{\tau}{4}\delta_\gamma^{(GI)} \tag{10.79}$$

が成り立つ．

2 成分近似においては，式 (9.110) で与えられたように，断熱ゆらぎに対するゲージ不変量 $\boldsymbol{\Phi}$ が超ハッブル・スケールかつ放射優勢期の極限で時間的に一定であった．ここで考えている 4 成分系における計量ゆらぎも，2 成分系の結果と定性的に同様の振る舞いをするはずである．そこで，変数 $\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\Psi}$ が時間的に変化しない解を探すことにする．すなわち，時間的な定数 $\boldsymbol{\Phi}_i, \boldsymbol{\Psi}_i$ を用いて，

$$\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}_i, \qquad \boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\Psi}_i \tag{10.80}$$

とおく．すると式 (10.60), (10.78), (10.79) により

$$\delta_\gamma^{(GI)} = -2\boldsymbol{\Phi}_i \tag{10.81}$$

が得られる．

上の解を式 (10.57), (10.58) に代入すると，成長解として

$$v_c^{(GI)} = v_b^{(GI)} = v_\nu^{(GI)} = v_\gamma^{(GI)} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\Phi}_i\tau, \qquad \Pi_\nu^{(S)} = \frac{2}{5}\boldsymbol{\Phi}_i\tau^2 \tag{10.82}$$

が得られる．この解を式 (10.65) に代入することにより，

$$\boldsymbol{\Psi}_i = -\left(1 + \frac{2}{5}R_\nu\right)\boldsymbol{\Phi}_i \tag{10.83}$$

が得られる．放射優勢期においてはゲージ不変量 $\boldsymbol{\Psi}$ と $\boldsymbol{\Phi}$ の絶対値の大きさに 15% 程度の違いが生じることがわかる．これにより，式 (10.61) の曲率ゆらぎ ζ を求めると，時間的な一定値

$$\zeta \equiv \zeta_i = -\frac{15 + 4R_\nu}{10}\boldsymbol{\Phi}_i \tag{10.84}$$

となる．上式で定義される曲率ゆらぎの一定値 ζ_i を用いると，式 (10.80), (10.83)

により

$$\Phi = -\frac{10}{15+4R_\nu}\zeta_\mathrm{i}, \qquad \Psi = \frac{10+4R_\nu}{15+4R_\nu}\zeta_\mathrm{i} \tag{10.85}$$

が得られる．式 (10.77), (10.81), (10.82) に与えられる諸成分のゆらぎ変数を ζ_i で表すと，

$$\delta_\mathrm{c}^{(\mathrm{GI})} = \delta_\mathrm{b}^{(\mathrm{GI})} = \frac{15}{15+4R_\nu}\zeta_\mathrm{i}, \qquad \delta_\nu^{(\mathrm{GI})} = \delta_\gamma^{(\mathrm{GI})} = \frac{20}{15+4R_\nu}\zeta_\mathrm{i} \tag{10.86}$$

$$v_\mathrm{c}^{(\mathrm{GI})} = v_\mathrm{b}^{(\mathrm{GI})} = v_\nu^{(\mathrm{GI})} = v_\gamma^{(\mathrm{GI})} = \frac{5\tau}{15+4R_\nu}\zeta_\mathrm{i}, \qquad \Pi_\nu^{(\mathrm{S})} = -\frac{4\tau^2}{15+4R_\nu}\zeta_\mathrm{i} \tag{10.87}$$

となる．以上が，超ハッブル・スケールと放射優勢期の極限における，断熱ゆらぎの漸近解である．

10.2.3 等曲率ゆらぎ

断熱ゆらぎにおいては，初期条件として曲率ゆらぎ ζ が有限の一定値を持っている．断熱ゆらぎに直交するモードとして，この曲率ゆらぎが十分初期でゼロとなるモードを**等曲率ゆらぎ** (isocurvature perturbations) という．2 成分系における等曲率ゆらぎは 1 種類しかない．だが，3 成分以上を持つ系で等曲率ゆらぎの条件だけを課しても，成分間の相対的なゆらぎの自由度が固定されない．このため，多成分系の等曲率ゆらぎには，さらに複数のモードが存在する．

2 成分系では，式 (9.128) からわかるように，等曲率ゆらぎモードにおける曲率ゆらぎは宇宙初期の極限 $\tau \to 0$ で消えるが，高次の効果としてスケール因子に比例する成長を行う．いま考えている 4 成分系の等曲率ゆらぎモードにおいても，曲率ゆらぎが宇宙初期の極限で定数になる成分を持たなければ，時間とともに成長する項はあってもよい．すなわち，等曲率ゆらぎを特徴づける条件は

$$\zeta \to 0 \qquad (\tau \to 0) \tag{10.88}$$

である．

相対エントロピー摂動がゼロでない値を持つとき，式 (7.260), (10.69), (10.70) を用いて全密度ゆらぎを求めると，

$$\delta^{(\mathrm{GI})} = \frac{\bar\rho_\mathrm{c}\delta_\mathrm{c}^{(\mathrm{GI})} + \bar\rho_\mathrm{b}\delta_\mathrm{b}^{(\mathrm{GI})} + \bar\rho_\mathrm{r}\delta_\mathrm{r}^{(\mathrm{GI})}}{\bar\rho} = \delta_\nu^{(\mathrm{GI})} + \frac{\bar\rho_\mathrm{c}}{\bar\rho}S_\mathrm{c} + \frac{\bar\rho_\mathrm{b}}{\bar\rho}S_\mathrm{b} - \frac{4}{3}S_\nu \tag{10.89}$$

が得られる．ただし放射優勢期の極限で $\bar\rho_\mathrm{c}, \bar\rho_\mathrm{b} \ll \bar\rho \simeq \bar\rho_\mathrm{r} = \bar\rho_\nu + \bar\rho_\gamma$ となることを用

いた．ここで時間に依存しない定数

$$R_b \equiv \frac{\bar{\rho}_b}{\bar{\rho}_m} = \frac{\bar{\rho}_b}{\bar{\rho}_c + \bar{\rho}_b}, \qquad R_c \equiv \frac{\bar{\rho}_c}{\bar{\rho}_m} = 1 - R_b \tag{10.90}$$

を定義し，式 (9.87) に対して放射優勢期の極限 $y = a/a_{eq} \ll 1$ をとった式

$$\frac{a}{a_{eq}} = \frac{k_{eq}}{\sqrt{2}}\tau \tag{10.91}$$

を用いると，放射優勢期において

$$\frac{\bar{\rho}_b}{\bar{\rho}} = \frac{R_b\bar{\rho}_m}{\bar{\rho}_r} = \frac{R_b a}{a_{eq}} = \frac{k_{eq}R_b}{\sqrt{2}}\tau, \qquad \frac{\bar{\rho}_c}{\bar{\rho}} = \frac{k_{eq}R_c}{\sqrt{2}}\tau \tag{10.92}$$

となることがわかる．式 (10.89), (10.92) より

$$\delta^{(GI)} = \delta_\nu^{(GI)} + \frac{k_{eq}}{\sqrt{2}}(R_c S_c + R_b S_b)\tau - \frac{4}{3}S_\nu \tag{10.93}$$

が成り立つ．

等曲率ゆらぎの条件のもとで，漸近的な形

$$\Phi = \alpha\tau^n, \qquad \Psi = \beta\tau^n \tag{10.94}$$

を仮定して解を探すことにする．ただし α, β は時間的に変化しない定数とする．式 (10.61) で与えられる曲率ゆらぎ ζ が等曲率ゆらぎの条件式 (10.88) を満たすには，$n > 0$ であれば十分である．そうでなければ，

$$\alpha = (n+2)\beta \qquad (n \leq 0) \tag{10.95}$$

を満たす必要である．また，式 (10.94) の形の解の場合，式 (10.59), (10.60) により

$$\delta^{(GI)} = -2(\alpha - n\beta)\tau^n \tag{10.96}$$

という関係が成り立つ．さらに式 (10.52) 第 1 式を積分することにより，

$$\delta_\nu^{(GI)} = -4\beta\tau^n + C_\nu \tag{10.97}$$

が得られる．ただし C_ν は時間的に変化しない定数である．式 (10.96), (10.97) を式 (10.93) へ代入すると，関係式

$$2\left[\alpha - (n+2)\beta\right]\tau^n + \frac{k_{eq}}{\sqrt{2}}(R_c S_c + R_b S_b)\tau - \frac{4}{3}S_\nu + C_\nu = 0 \tag{10.98}$$

が得られる．ここで式 (10.74) により相対エントロピー摂動 S_c, S_b, S_ν の値は宇宙

初期で時間的に一定である．その中で 1 つだけゼロでない場合を別々に考えたものが初期条件のモードを与え，一般解はそれらの重ね合わせで与えられる．

10.2.4 バリオン等曲率モード

最初に，バリオンの相対エントロピー摂動 $S_{\rm b}$ だけがゼロでない等曲率ゆらぎを考える．すなわち，

$$S_{\rm b} \neq 0, \qquad S_{\rm c} = S_{\nu} = 0 \tag{10.99}$$

となる場合である．このとき式 (10.73) により

$$S_{{\rm b}\gamma} = S_{\rm b}, \qquad S_{{\rm c}\gamma} = S_{\nu\gamma} = 0 \tag{10.100}$$

となる．等曲率ゆらぎにおけるこの初期条件のモードを**バリオン等曲率モード** (baryon isocurvature mode) という．この場合，式 (10.71) により

$$\delta_{\rm c}^{\rm (GI)} = \frac{3}{4}\delta_{\nu}^{\rm (GI)}, \qquad \delta_{\rm b}^{\rm (GI)} = \frac{3}{4}\delta_{\nu}^{\rm (GI)} + S_{\rm b}, \qquad \delta_{\gamma}^{\rm (GI)} = \delta_{\nu}^{\rm (GI)} \tag{10.101}$$

が成り立つ．さらに，式 (10.98) は

$$2\left[\alpha - (n+2)\beta\right]\tau^n + \frac{k_{\rm eq}}{\sqrt{2}} R_{\rm b} S_{\rm b}\tau + C_{\nu} = 0 \tag{10.102}$$

となる．この式が任意の τ について満たされる条件により，

$$C_{\nu} = 0, \qquad n = 1, \qquad \alpha - 3\beta = -\frac{k_{\rm eq}}{2\sqrt{2}} R_{\rm b} S_{\rm b} \tag{10.103}$$

が得られる．すると，式 (10.97) により

$$\delta_{\nu}^{\rm (GI)} = -4\beta\tau \tag{10.104}$$

となる．

式 (10.101), (10.104) を式 (10.57), (10.58) へ代入すると，成長解として

$$v_{\rm c}^{\rm (GI)} = -\frac{\alpha}{3}\tau^2, \quad v_{\rm b}^{\rm (GI)} = v_{\gamma}^{\rm (GI)} = v_{\nu}^{\rm (GI)} = -\frac{\beta - \alpha}{2}\tau^2, \quad \Pi_{\nu}^{\rm (S)} = -\frac{4}{15}(\beta - \alpha)\tau^3 \tag{10.105}$$

が得られる．

式 (10.94), (10.105) を式 (10.65) へ代入することにより，

$$\beta = -\frac{15 + 4R_{\nu}}{15 - 4R_{\nu}}\alpha \tag{10.106}$$

という関係が得られる．この式と式 (10.103) 第 3 式を連立して α, β について解く

ことにより，計量ゆらぎの漸近的な成長解として

$$\Phi = -\frac{k_{\rm eq}}{8\sqrt{2}}\frac{15-4R_\nu}{15+2R_\nu}R_{\rm b}S_{\rm b}\tau, \qquad \Psi = \frac{k_{\rm eq}}{8\sqrt{2}}\frac{15+4R_\nu}{15+2R_\nu}R_{\rm b}S_{\rm b}\tau \tag{10.107}$$

が得られる．上の式において $R_{\rm b}=1,\ R_\nu=0$ の極限をとり，式 (10.91) を用いれば，2 成分系の式 (9.125) における放射優勢期の極限に帰着する．さらに式 (10.101), (10.103)–(10.106) により

$$\delta_{\rm c}^{\rm (GI)} = \delta_{\rm b}^{\rm (GI)} - S_{\rm b} = \frac{3}{4}\delta_\gamma^{\rm (GI)} = \frac{3}{4}\delta_\nu^{\rm (GI)} = -\frac{3k_{\rm eq}}{8\sqrt{2}}\frac{15+4R_\nu}{15+2R_\nu}R_{\rm b}S_{\rm b}\tau \tag{10.108}$$

$$v_{\rm c}^{\rm (GI)} = \frac{k_{\rm eq}}{24\sqrt{2}}\frac{15-4R_\nu}{15+2R_\nu}R_{\rm b}S_{\rm b}\tau^2 \tag{10.109}$$

$$v_{\rm b}^{\rm (GI)} = v_\nu^{\rm (GI)} = v_\gamma^{\rm (GI)} = \frac{15k_{\rm eq}}{8\sqrt{2}}\frac{R_{\rm b}S_{\rm b}\tau^2}{15+2R_\nu}, \qquad \Pi_\nu^{\rm (S)} = -\frac{k_{\rm eq}}{\sqrt{2}}\frac{R_{\rm b}S_{\rm b}\tau^3}{15+2R_\nu} \tag{10.110}$$

と表される．これらがバリオン等曲率ゆらぎにおける諸成分ゆらぎの漸近解である．初期条件として，バリオン成分の密度ゆらぎに対応するゲージ不変量だけが一定の振幅から始まり，それ以外の成分の密度ゆらぎは共形時間に比例して成長してくることがわかる．

10.2.5 CDM 等曲率モード

次に，コールド・ダークマターの相対エントロピー摂動 $S_{\rm c}$ だけがゼロでない等曲率ゆらぎを考える．すなわち，

$$S_{\rm c} \neq 0, \qquad S_{\rm b} = S_\nu = 0 \tag{10.111}$$

とする．このとき式 (10.73) により

$$S_{{\rm c}\gamma} = S_{\rm c}, \qquad S_{{\rm b}\gamma} = S_{\nu\gamma} = 0 \tag{10.112}$$

が成り立つ．等曲率ゆらぎにおけるこの初期条件のモードを **CDM 等曲率モード** (CDM isocurvature mode) という．

この場合の解は，上で考察したバリオン等曲率モードとほぼ同様に求めることができる．実際，式 (10.101)–(10.103) において $\delta_{\rm c}^{\rm (GI)} \leftrightarrow \delta_{\rm b}^{\rm (GI)},\ R_{\rm b} \to R_{\rm c},\ S_{\rm b} \to S_{\rm c}$ と置き換えた式が成り立ち，また，式 (10.105), (10.106) は変更なく成り立つ．したがって，式 (10.107) に対応して

$$\Phi = -\frac{k_{\rm eq}}{8\sqrt{2}}\frac{15-4R_\nu}{15+2R_\nu}R_{\rm c}S_{\rm c}\tau, \qquad \Psi = \frac{k_{\rm eq}}{8\sqrt{2}}\frac{15+4R_\nu}{15+2R_\nu}R_{\rm c}S_{\rm c}\tau \tag{10.113}$$

が得られる．さらに，式 (10.108)-(10.110) に対応して

$$\delta_{\mathrm{c}}^{(\mathrm{GI})} - S_{\mathrm{c}} = \delta_{\mathrm{b}}^{(\mathrm{GI})} = \frac{3}{4}\delta_{\gamma}^{(\mathrm{GI})} = \frac{3}{4}\delta_{\nu}^{(\mathrm{GI})} = -\frac{3k_{\mathrm{eq}}}{8\sqrt{2}}\frac{15+4R_{\nu}}{15+2R_{\nu}}R_{\mathrm{c}}S_{\mathrm{c}}\tau \tag{10.114}$$

$$v_{\mathrm{c}}^{(\mathrm{GI})} = \frac{k_{\mathrm{eq}}}{24\sqrt{2}}\frac{15-4R_{\nu}}{15+2R_{\nu}}R_{\mathrm{c}}S_{\mathrm{c}}\tau^2 \tag{10.115}$$

$$v_{\mathrm{b}}^{(\mathrm{GI})} = v_{\nu}^{(\mathrm{GI})} = v_{\gamma}^{(\mathrm{GI})} = \frac{15k_{\mathrm{eq}}}{8\sqrt{2}}\frac{R_{\mathrm{c}}S_{\mathrm{c}}\tau^2}{15+2R_{\nu}}, \qquad \Pi_{\nu}^{(\mathrm{S})} = -\frac{k_{\mathrm{eq}}}{\sqrt{2}}\frac{R_{\mathrm{c}}S_{\mathrm{c}}\tau^3}{15+2R_{\nu}} \tag{10.116}$$

となる．

10.2.6 ニュートリノ密度・等曲率モード

次に，ニュートリノの相対エントロピー摂動 S_{ν} だけがゼロでない等曲率ゆらぎを考える．すなわち，

$$S_{\nu} \neq 0, \qquad S_{\mathrm{c}} = S_{\mathrm{b}} = 0 \tag{10.117}$$

の場合である．このとき式 (10.73) により

$$S_{\mathrm{c}\gamma} = S_{\mathrm{b}\gamma} = \frac{R_{\nu}S_{\nu}}{1-R_{\nu}}, \qquad S_{\nu\gamma} = \frac{S_{\nu}}{1-R_{\nu}} \tag{10.118}$$

が成り立つ．等曲率ゆらぎにおけるこの初期条件のモードを**ニュートリノ密度・等曲率モード** (neutrino density isocurvature mode) という．この場合，式 (10.71) により

$$\delta_{\mathrm{c}}^{(\mathrm{GI})} = \delta_{\mathrm{b}}^{(\mathrm{GI})} = \frac{3}{4}\delta_{\nu}^{(\mathrm{GI})} - S_{\nu}, \qquad \delta_{\gamma}^{(\mathrm{GI})} = \delta_{\nu}^{(\mathrm{GI})} - \frac{4}{3}\frac{S_{\nu}}{1-R_{\nu}} \tag{10.119}$$

が成り立つ．

このモードについて，式 (10.98) は

$$2\left[\alpha-(n+2)\beta\right]\tau^n - \frac{4}{3}S_{\nu} + C_{\nu} = 0 \tag{10.120}$$

となる．この式が任意の τ について満たされるためには $n = 0$ もしくは $\alpha = (n+2)\beta$ が成り立たなければならない．ところが $n = 0$ の場合には等曲率ゆらぎの条件式 (10.95) が適用されるから，いずれにしても

$$\alpha = (n+2)\beta, \qquad C_{\nu} = \frac{4}{3}S_{\nu} \tag{10.121}$$

が成り立つ．したがって，式 (10.97), (10.119) により

$$\delta_\nu^{(\mathrm{GI})} = -4\beta\tau^n + \frac{4}{3}S_\nu \tag{10.122}$$

が得られる．この式と式 (10.94) を式 (10.58) へ代入して積分すると，成長解として

$$v_\nu^{(\mathrm{GI})} = -\beta\tau^{n+1} - \frac{S_\nu\tau}{3}, \qquad \Pi_\nu^{(\mathrm{S})} = \frac{4\tau^2}{5}\left(\frac{2\beta\tau^n}{n+2} + \frac{1}{3}S_\nu\right) \tag{10.123}$$

が得られる．ただし $n = -1$ の場合，式 (10.58) をそのままでは積分できないが，$n \to -1$ の極限と考えれば上の式が成り立つ．

式 (10.94), (10.121) を式 (10.65) へ代入すると，

$$(n+3)\beta\tau^n + \frac{4R_\nu}{5}\left(\frac{2\beta\tau^n}{n+2} + \frac{1}{3}S_\nu\right) = 0 \tag{10.124}$$

となる．この式が任意の τ について満たされる条件により

$$n = 0, \qquad \beta = -\frac{4}{3}\,\frac{R_\nu S_\nu}{15+4R_\nu} \tag{10.125}$$

が得られる．すると式 (10.121) から $\alpha = 2\beta$ である．これらの関係式を式 (10.94) へ代入して，

$$\Phi = -\frac{8}{3}\,\frac{R_\nu S_\nu}{15+4R_\nu}, \qquad \Psi = -\frac{4}{3}\,\frac{R_\nu S_\nu}{15+4R_\nu} \tag{10.126}$$

が得られる．計量ゆらぎに対応するゲージ不変量自体は $\tau \to 0$ の極限でもゼロにならないが，曲率ゆらぎ変数は式 (10.61) によりこの極限でゼロになる．式 (10.119), (10.121), (10.122), (10.125) により各成分の密度ゆらぎの表式が求められ，その結果と式 (10.126) を式 (10.57), (10.58) へ代入して積分することにより，成長解が求められる．その結果，

$$\delta_\mathrm{c}^{(\mathrm{GI})} = \delta_\mathrm{b}^{(\mathrm{GI})} = \frac{4R_\nu S_\nu}{15+4R_\nu}, \qquad \delta_\gamma^{(\mathrm{GI})} = -\frac{4R_\nu(11+8R_\nu)}{3(1-R_\nu)(15+4R_\nu)}S_\nu \tag{10.127}$$

$$\delta_\nu^{(\mathrm{GI})} = \frac{4}{3}\,\frac{15+8R_\nu}{15+4R_\nu}S_\nu, \qquad v_\mathrm{c}^{(\mathrm{GI})} = \frac{4}{3}\,\frac{R_\nu S_\nu\tau}{15+4R_\nu} \tag{10.128}$$

$$v_\mathrm{b}^{(\mathrm{GI})} = v_\gamma^{(\mathrm{GI})} = \frac{19R_\nu S_\nu\tau}{3(1-R_\nu)(15+4R_\nu)}, \quad v_\nu^{(\mathrm{GI})} = -\frac{5S_\nu\tau}{15+4R_\nu}, \quad \Pi_\nu^{(\mathrm{S})} = \frac{4S_\nu\tau^2}{15+4R_\nu} \tag{10.129}$$

が得られる．これらがニュートリノ密度・等曲率モードにおける諸成分ゆらぎの漸近解である．上で調べたバリオンやコールド・ダークマターに対する等曲率ゆらぎの場合と異なり，密度ゆらぎに対応するゲージ不変量 Φ, Ψ が初期条件においても

一定の振幅を持つ．

10.2.7 ニュートリノ速度・等曲率モード

最後に，等曲率ゆらぎでありながら，相対エントロピー摂動がすべてゼロになるようなモードの可能性を考えてみる．すなわち，

$$S_{\rm c} = S_{\rm b} = S_\nu = 0 \tag{10.130}$$

を満たしつつ，曲率ゆらぎ変数 ζ も $\tau \to 0$ の極限でゼロになるようなモードである．このとき，(10.71) により

$$\delta_{\rm c}^{\rm (GI)} = \delta_{\rm b}^{\rm (GI)} = \frac{3}{4}\delta_\nu^{\rm (GI)} = \frac{3}{4}\delta_\gamma^{\rm (GI)} \tag{10.131}$$

が成り立つ．また式 (10.98) は

$$2\left[\alpha - (n+2)\beta\right]\tau^n + C_\nu = 0 \tag{10.132}$$

となる．この式が任意の τ について満たされるためには $n = 0$ もしくは $\alpha = (n+2)\beta$ が成り立たなければならない．ここで $n = 0$ の場合は等曲率ゆらぎの条件により式 (10.95) が適用されるから，いずれにしても

$$\alpha = (n+2)\beta, \qquad C_\nu = 0 \tag{10.133}$$

が成り立つ．したがって，式 (10.97) により

$$\delta_\nu^{\rm (GI)} = -4\beta\tau^n \tag{10.134}$$

が得られる．この式と式 (10.94) を式 (10.58) へ代入して積分すると，$n \neq -1$ のとき，成長解として

$$v_\nu^{\rm (GI)} = -\beta\tau^{n+1} + A_\nu, \qquad \Pi_\nu^{\rm (S)} = \frac{8}{5}\left(\frac{\beta\tau^{n+2}}{n+2} - A_\nu\tau\right) \tag{10.135}$$

が得られる．ただし A_ν は積分定数である．また $n = -1$ の場合，式 (10.58) をそのまま積分することはできないが，$n \to -1$ の極限と考えれば上の式が成り立つ．

式 (10.94), (10.133), (10.135) を式 (10.65) へ代入すると，

$$(n+3)\beta\tau^n + \frac{8R_\nu}{5}\left(\frac{\beta\tau^n}{n+2} - \frac{A_\nu}{\tau}\right) = 0 \tag{10.136}$$

となる．この式が任意の τ について満たされる条件は，

$$n = -1, \qquad \beta = \frac{4R_\nu A_\nu}{5 + 4R_\nu} \tag{10.137}$$

である．すると式 (10.133) から $\alpha = \beta$ である．したがって，

$$\Phi = \Psi = \frac{4R_\nu A_\nu \tau^{-1}}{5 + 4R_\nu} \tag{10.138}$$

が得られる．計量ゆらぎに対応するゲージ不変量が $\tau \to 0$ の極限で発散していて，このモードは奇妙に見える．だが，ゲージ不変量 Φ, Ψ は共形ニュートン・ゲージにおける計量ゆらぎに対応していて，他のゲージでの計量ゆらぎが発散するとは限らない[*3]．

ここで式 (10.131) と式 (10.134) に $n = -1$ を代入したものを用いて，式 (10.57), (10.58) の積分を行えば，成長解として

$$v_{\rm c}^{\rm (GI)} = \alpha, \qquad v_{\rm b}^{\rm (GI)} = v_\gamma^{\rm (GI)} = -\beta + A_\gamma, \qquad v_\nu^{\rm (GI)} = -\beta + A_\nu \tag{10.139}$$

が得られる．ただし A_γ は積分定数である．ここで上式と式 (7.261) により全成分の速度場を求めると，放射優勢期の極限で

$$v^{\rm (GI)} = -\beta + R_\nu A_\nu + (1 - R_\nu) A_\gamma \tag{10.140}$$

が得られる．この式と式 (10.60), (10.137), (10.138) を用いると，積分定数の間に

$$A_\gamma = -\frac{R_\nu A_\nu}{1 - R_\nu} \tag{10.141}$$

という関係が得られる．すると式 (10.139) により

$$v_\nu^{\rm (GI)} - v_\gamma^{\rm (GI)} = \frac{A_\nu}{1 - R_\nu} \tag{10.142}$$

という関係がある．すなわち，積分定数として出てきた A_ν は初期条件におけるニュートリノと光子の速度差に比例する量である．つまり，ここに導かれたモードは放射成分であるニュートリノと光子が異なる速度で生成されるようなモードである．このことから，この初期条件のモードを**ニュートリノ速度・等曲率モード** (neutrino velocity isocurvature mode) という．このモードは，論理的には可能であるものの，それを自然に生成する物理的機構というのは考えにくい．

以上に得られた式 (10.131), (10.134), (10.135), (10.137), (10.138), (10.140) を用

---

*3　実際，同期ゲージではこのモードの計量が $\tau \to 0$ の極限で有限になることを示すことができる [M. Bucher, K. Moodley and N. Turok, *Phys. Rev.* D **62**, 083508(2000)].

いて各成分のゆらぎ変数に対する成長解をまとめると，

$$\delta_c^{(GI)} = \delta_b^{(GI)} = -\frac{12R_\nu A_\nu \tau^{-1}}{5+4R_\nu}, \qquad \delta_\nu^{(GI)} = \delta_\gamma^{(GI)} = -\frac{16R_\nu A_\nu \tau^{-1}}{5+4R_\nu} \tag{10.143}$$

$$v_c^{(GI)} = \frac{4R_\nu A_\nu}{5+4R_\nu}, \qquad v_b^{(GI)} = v_\gamma^{(GI)} = -\frac{9R_\nu A_\nu}{(1-R_\nu)(5+4R_\nu)} \tag{10.144}$$

$$v_\nu^{(GI)} = \frac{5A_\nu}{5+4R_\nu}, \qquad \Pi_\nu^{(S)} = -\frac{8A_\nu \tau}{5+4R_\nu} \tag{10.145}$$

が得られる．式 (10.138) と上式がニュートリノ速度・等曲率モードにおける諸成分ゆらぎの漸近解である．

10.2.8 線形摂動の数値解

諸成分ゆらぎの発展方程式を数値的に解けば，線形近似の範囲内で，任意時刻の解を正確に求めることができる．線形近似の線形性により，時間発展したゆらぎの振幅は初期ゆらぎの振幅に比例する．断熱ゆらぎを例にとれば，式 (10.85)–(10.87) のように変数 ζ_i が初期ゆらぎを特徴づける．この初期ゆらぎ変数 ζ_i は波数 $\boldsymbol{k}$ の関数である．線形摂動の時間発展は波数ごとに独立であるから，最終的に数値計算によって求めた線形摂動の解も，波数ごとに初期ゆらぎ変数 ζ_i に比例する．実際の数値計算では，その比例係数を波数ごとに求めることで，複数の初期条件に対する解を 1 度の計算で求めることができる．

すなわち，初期ゆらぎ変数の具体的な値ごとに数値計算をする必要はなく，各波数のモードごとに微分方程式を数値的に解けば十分である．このとき，発展方程式は波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ の方向には依存しないので，十分に細かくとった波数の絶対値 k ごとに数値計算すればよい．すなわち，$\zeta_i = 1$ とおいて数値計算し，その結果得られる各ゆらぎ変数の値に初期条件 $\zeta_i(\boldsymbol{k})$ をかければ，その初期条件に対する一般の解となる．初期条件に等曲率ゆらぎが混ざっている場合には，等曲率モードについて同じことを行い，その結果を任意の初期ゆらぎ変数 $S_c(\boldsymbol{k}), S_b(\boldsymbol{k}), S_\nu(\boldsymbol{k}), A_\nu(\boldsymbol{k})$ の重みで重ね合わせることで，一般解が得られる．

ゆらぎの発展方程式を数値的に解く計算機コードがいくつか公開されている．その中の 1 つであり，現在広く使われている公開コード CAMB*4を利用して，ゆらぎの時間発展を数値的に解いた結果を図 10.1 に示す*5．この図には，ゲージ

---

*4 `http://camb.info` (A. Lewis and A. Challinor)

*5 CAMB には独特の内部変数が用いられている．この図を作成するとき，CAMB の内部コードを改変して共形ニュートン・ゲージへ変数変換した．この作業では，市來淨與氏による改変コー

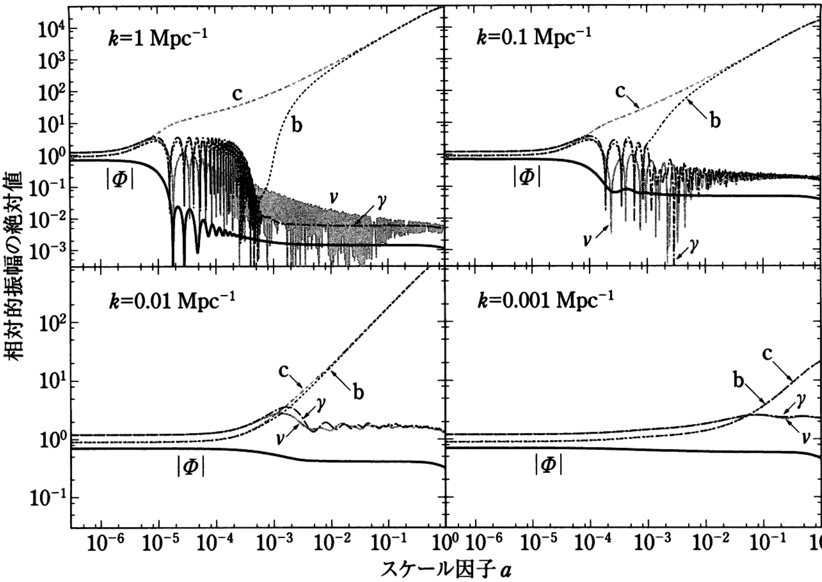


図 10.1 密度ゆらぎに対応するゲージ不変量 $\delta_c^{(GI)}, \delta_b^{(GI)}, \delta_\gamma^{(GI)}, \delta_\nu^{(GI)}$ と，重力ポテンシャルに対応するゲージ不変量 Φ の時間発展をスケール因子の関数として表したもの．ゆらぎの符号については絶対値をとってある．各曲線のラベルは対応する変数の添字 c, b, γ, ν によって表した．

不変変数 Φ, $\delta_c^{(GI)}$, $\delta_b^{(GI)}$, $\delta_\gamma^{(GI)}$, $\delta_\nu^{(GI)}$ の時間発展が示されていて，4 つの波数 $k = 1, 0.1, 0.01, 0.001\ \mathrm{Mpc}^{-1}$ に対する結果が与えられている．ゆらぎの初期条件には，標準的な断熱ゆらぎを採用し，宇宙論パラメータの値には付録 A.4 に与えられる観測値の中心値を用いた．各波数に対応するスケールが，等密度時 $a \simeq 3 \times 10^{-4}$ よりも前にハッブル半径内に入るか，あるいは後に入るかによって，ゆらぎの時間発展はかなり異なる．ちょうど等密度時にハッブル半径に入るスケールの波数は，式 (2.154) に与えられるように，$k = k_{\mathrm{eq}} \simeq 10^{-2}\ \mathrm{Mpc}^{-1}$ である．

左上の図は，波数 $k = 1\ \mathrm{Mpc}^{-1}$ に対する発展を表す．対応するスケールは，等密度時よりも十分以前にハッブル半径内に入る．超ハッブル・スケールでは，ここに示したすべての変数が時間的に一定である．ハッブル半径内に入ると，コールド・ダークマターのゆらぎ以外の成分は振動するようになる．コールド・ダークマターのゆらぎはハッブル半径内で成長する．放射優勢期の成長は抑えられるが，物

ドを参考にさせていただいた．

質優勢期になるとスケール因子に比例して成長するようになる．一方，バリオンと光子のゆらぎは，晴れ上がり時 $a \simeq 10^{-3}$ まで一体となって振動し，晴れ上がりの少し前から拡散減衰により振動の振幅が小さくなる．晴れ上がり後は，光子の振幅は小さいままに保たれるのに対して，バリオンのゆらぎは，重力の効果によってコールド・ダークマターのゆらぎに急速に追いついていく．ニュートリノは他の成分から脱結合しているため，ハッブル半径に入った後のニュートリノのゆらぎは単調な減衰振動をする．重力ポテンシャル Φ は，ハッブル半径内に入ってから放射優勢期が終わるまで，放射成分の振動に引きずられて減衰振動する．物質優勢期になると，ポテンシャルは再び変化しなくなる．右端でポテンシャルの値が多少減衰しているのは，宇宙項による加速膨張の効果である．

右上の図は，波数 $k = 0.1\,\mathrm{Mpc}^{-1}$ に対するものであり，ハッブル半径に入る時期が $k = 1\,\mathrm{Mpc}^{-1}$ の場合よりも遅いために，ハッブル半径内におけるバリオンと光子のゆらぎが振動する期間は短い．それに伴って，重力ポテンシャルの減衰も少なくなる．左下の図は，波数 $k = 0.01\,\mathrm{Mpc}^{-1}$ に対するものであり，ハッブル半径に入るのがちょうど等密度時の頃である．この場合，コールド・ダークマターのゆらぎはハッブル半径に入るとそのままスケール因子に比例して成長し始める．バリオンのゆらぎはわずかに光子のゆらぎに引きずられる時期があるものの，すぐにダークマターのゆらぎと同様に成長する．一方，放射成分である光子とニュートリノのゆらぎは成長できず，晴れ上がり後はほぼ一定となる．最後に，右下の図は，波数 $k = 0.001\,\mathrm{Mpc}^{-1}$ に対するものであり，ハッブル半径に入るのは物質優勢期になってからである．この場合，ハッブル半径に入った後，ダークマターとバリオンだけが成長する．

こうして数値計算で理論的に求めた線形摂動の解を用いると，観測との比較によって宇宙論モデルに制限を加えたり，宇宙論パラメータを精度よく決定したりすることが可能になる．線形摂動を観測的に検証する方法にはさまざまなものがある．それらは，現代の宇宙論が検証可能な科学として発展するために，本質的に重要な役割を果たしている．次の節では，線形摂動論を比較的直接に観測量と結びつけることのできる，宇宙マイクロ波背景放射のゆらぎについて述べる．

10.3 宇宙マイクロ波背景放射ゆらぎ

宇宙マイクロ波背景放射の存在は，歴史的にビッグバン理論を裏づける証拠として重要な役割を果たした．現代ではさらに，その温度や偏光に非等方性が発見され

ている．これらの非等方性の解析により，非常に高い精度で宇宙論モデルを検証することが可能になっている．宇宙マイクロ波背景放射ゆらぎは，宇宙論の精密科学化に大きな役割を果たした．この節では，線形摂動論に基づいて，宇宙マイクロ波背景放射ゆらぎに関する観測量を理論的に予言する手法について述べる．

10.3.1 宇宙マイクロ波背景放射の温度ゆらぎ

宇宙マイクロ波背景放射として観測される光子の温度ゆらぎ $\delta T/T$ は，式 (9.235) で定義される輝度関数 Θ_I に対応する観測量である．天球上に張った極座標の方向 (θ, ϕ) に観測される温度ゆらぎ $\delta T/T$ は，球面調和関数により

$$\frac{\delta T}{T} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} a_{lm} Y_l^m(\theta, \phi) \tag{10.146}$$

と展開できる．この係数 a_{lm} が，温度ゆらぎの観測量となる．

一方，9.5 節で扱った輝度関数 Θ_I は，フーリエ空間の関数として波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ のモードごとに定められ，これを実空間の関数に戻した量が実際の温度ゆらぎに対応する．9.5 節と同様に，背景の空間曲率がゼロ ($K = 0$) の簡単な場合を考え，実空間における時空座標値 $(\boldsymbol{x}, \tau)$ での輝度関数の値を $\Theta(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}, \tau)$ とすると，

$$\Theta(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}, \tau) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \Theta_\mathrm{I}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{k}, \tau) \tag{10.147}$$

$$= \sum_{l,m} (-i)^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_l^m(\boldsymbol{n}) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \Theta_{\mathrm{I}l}^{(m)}(\boldsymbol{k}, \tau) \tag{10.148}$$

となる．ただし，2 番めの等式では式 (9.239) を用いて，さらに波数ベクトルと共形時間への依存性を引数としてあらわに示した．

観測者の位置を座標原点 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ にとれば，現在時刻 τ_0 で観測者に測定される温度ゆらぎは

$$\frac{\delta T}{T} = \Theta(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{0}, \tau_0) \tag{10.149}$$

となる．これを式 (10.146) と比較することにより，

$$a_{lm} = (-i)^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Theta_{\mathrm{I}l}^{(m)}(\boldsymbol{k}, \tau_0) \tag{10.150}$$

が得られる．単極および双極成分 $l = 0, 1$ の輝度関数は，スカラー型摂動成分に対

してゲージ依存する．しかし $l \geq 2$ に対する輝度関数はゲージ不変量であるため，単極および双極成分をとり除いた $l \geq 2$ に対する温度ゆらぎの係数 a_{lm} はゲージ不変量となり，線形近似の範囲で一般の観測者が測定する値を与える．

式 (10.148) の被積分関数に現れる関数 $\Theta_{\mathrm{I}l}^{(m)}$ は，観測者の座標系で求められる係数である．一方，式 (9.267) の発展方程式は，$\boldsymbol{k} \parallel \hat{\boldsymbol{z}}$ となる特殊な座標系における係数 $\tilde{\Theta}_{\mathrm{I}l}^{(m)}$ に対するものであった．波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ の方向 $\hat{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{k}/k$ に対応する球座標を (θ, ϕ) とするとき，z 軸を $\hat{\boldsymbol{k}}$ へ回転させる回転行列は $D^l_{mm'}(\phi, \theta, 0)$ である．これを以下では，$D^l_{mm'}(\hat{\boldsymbol{k}}) \equiv D^l_{mm'}(\phi, \theta, 0)$ という記号で表すことにする．一般に関数をスピン球面調和関数で展開したときの係数は，球座標の変換に対して式 (6.320) のように変換する．したがって，一般の座標系における展開式 (9.239) の係数 $\Theta_{\mathrm{I}l}^{(m)}$ は，$\boldsymbol{k} \parallel \hat{\boldsymbol{z}}$ となる特殊な座標系での係数 $\tilde{\Theta}_{\mathrm{I}l}^{(M)}$ との間に

$$\Theta_{\mathrm{I}l}^{(m)}(\boldsymbol{k}, \tau) = \sum_M D^l_{mM}(\hat{\boldsymbol{k}})\, \tilde{\Theta}_{\mathrm{I}l}^{(M)}(\boldsymbol{k}, \tau) \tag{10.151}$$

という関係がある．

線形摂動の特徴として，すべてのゆらぎ変数の値は初期ゆらぎの線形結合で与えられる．前節でくわしく述べたように，スカラー型摂動に対する初期ゆらぎの独立成分は $\zeta_{\mathrm{i}}(\boldsymbol{k})$, $S_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{k})$, $S_{\mathrm{b}}(\boldsymbol{k})$, $S_{\nu}(\boldsymbol{k})$, $A_{\nu}(\boldsymbol{k})$ である．これらの変数をまとめて $X_{\alpha}^{(0)}(\boldsymbol{k})$ と表し，独立な初期ゆらぎのモードを添字 α で区別することにする．たとえば，具体的に

$$X_1^{(0)} = \zeta_{\mathrm{i}}, \quad X_2^{(0)} = S_{\mathrm{c}}, \quad X_3^{(0)} = S_{\mathrm{b}}, \quad X_4^{(0)} = S_{\nu}, \quad X_5^{(0)} = A_{\nu} \tag{10.152}$$

などとする．同様に，ベクトル型摂動やテンソル型摂動も含めた独立な初期ゆらぎ成分を，まとめて $X_{\alpha}^{(M)}(\boldsymbol{k})$ により表すことができる．ただし $M = 0, \pm1, \pm2$ である．

このとき，線形発展した輝度関数を

$$\tilde{\Theta}_{\mathrm{I}l}^{(M)}(\boldsymbol{k}, \tau) = (2l+1) \sum_{\alpha} g_{\alpha l}^{\mathrm{T}(M)}(k, \tau) X_{\alpha}^{(M)}(\boldsymbol{k}) \tag{10.153}$$

と表すことができる．ここで係数 $g_{\alpha l}^{\mathrm{T}(M)}(k, \tau)$ は，ゆらぎの初期条件 α によって発展方程式を解いた解の時間変化を表すもので，この関数を**放射遷移関数** (radiation transfer function) という．線形発展方程式 (9.267), (9.268) は波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ の方向には依存せず，その絶対値 $k = |\boldsymbol{k}|$ にしか依存しないので，放射遷移関数も波数ベクトルの方向に依存しない．放射遷移関数を具体的に得るには，ある特定の M, α で特徴づけられる初期ゆらぎだけを，波数によらず $X_{\alpha}^{(M)} = 1$ とおき，その他

の初期ゆらぎはゼロとして，波数ごとに線形発展方程式 (9.267), (9.268) を数値的に積分して輝度関数 $\tilde{\Theta}_{\mathrm{I}\,l}^{(M)}$ を求めればよい．線形性により，こうして得られる解を $(2l+1)$ で割ったものはそのまま放射遷移関数 $g_{\alpha l}^{\mathrm{T}(M)}(k,\tau)$ に等しい．発展方程式の係数には複素数が含まれないので，変数 Θ_l の複素位相は時間発展によって変化しない．したがって放射遷移関数 $g_{\alpha l}^{\mathrm{T}(M)}(k,\tau)$ は実数である．

初期ゆらぎを特徴づける成分の 1 つである曲率ゆらぎ ζ に対し，そのパワースペクトル $P_\zeta(k)$ は式 (8.123) で定義された．これと同様に，2 つの初期ゆらぎ成分 $X_\alpha^{(M)}(\boldsymbol{k})$, $X_\beta^{(M')}(\boldsymbol{k})$ の交差パワースペクトル $P_{\alpha\beta}^{(M)}(k)$ を

$$\left\langle X_\alpha^{(M)}(\boldsymbol{k}) X_\beta^{(M')}(\boldsymbol{k}')\right\rangle = \delta_{MM'}\,(2\pi)^3 \delta_{\mathrm{D}}^3(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}') P_{\alpha\beta}^{(M)}(k) \qquad (10.154)$$

で定義する．ただし，テンソル型の異なる初期ゆらぎ成分は独立に生成され，$M = M'$ でないときには相関を持たないものと仮定した．一方，添字 α, β で表される初期ゆらぎの種類の間には，一般に相関があってもよいとする．実空間における初期ゆらぎは実数であるから，そのフーリエ変換である $X_\alpha^{(M)}(\boldsymbol{k})$ の複素共役は関係 $X_\alpha^{(M)*}(\boldsymbol{k}) = X_\alpha^{(M)}(-\boldsymbol{k})$ を満たす．したがって式 (10.154) は

$$\left\langle X_\alpha^{(M)*}(\boldsymbol{k}) X_\beta^{(M')}(\boldsymbol{k}')\right\rangle = \delta_{MM'}\,(2\pi)^3 \delta_{\mathrm{D}}^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') P_{\alpha\beta}^{(M)}(k) \qquad (10.155)$$

とも表すことができる．

式 (10.150) の 2 点相関を求めると，式 (10.151), (10.153), (10.155) を用いて

$$\langle a_{lm}{}^* a_{l'm'}\rangle = 4\pi\, i^{l-l'} \sqrt{(2l+1)(2l'+1)} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sum_M D^{l\,*}_{mM}(\hat{\boldsymbol{k}}) D^{l'}_{m'M}(\hat{\boldsymbol{k}}) \times \sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\, l}^{\mathrm{T}(M)}(k,\tau_0) g_{\beta\, l'}^{\mathrm{T}(M)}(k,\tau_0) P_{\alpha\beta}^{(M)}(k) \qquad (10.156)$$

という表式が得られる．ここに現れる回転行列は，式 (6.309) によりスピン球面調和関数を用いて

$$D^l_{mM}(\hat{\boldsymbol{k}}) = D^l_{mM}(\phi,\theta,0) = (-1)^m \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\; {}_M Y_l^{-m}(\hat{\boldsymbol{k}}) \qquad (10.157)$$

と表すことができる．そこで，スピン球面調和関数の直交関係 (6.305) を用いると，

$$\int d\Omega_{\boldsymbol{k}} D^{l\,*}_{mM}(\hat{\boldsymbol{k}}) D^{l'}_{m'M}(\hat{\boldsymbol{k}}) = \frac{4\pi}{2l+1} \delta_{mm'} \delta_{ll'} \qquad (10.158)$$

という直交関係が得られる．この関係を用いれば，式 (10.156) における波数ベク

トルの角度積分を行うことができて，

$$\langle a_{lm}{}^* a_{l'm'} \rangle = C_l \delta_{ll'} \delta_{mm'} \tag{10.159}$$

が導かれる．ただし

$$C_l = 4\pi \int \frac{k^2 dk}{2\pi^2} \sum_{\alpha,\beta} \sum_M g_{\alpha l}^{\mathrm{T}(M)}(k, \tau_0) g_{\beta l}^{\mathrm{T}(M)}(k, \tau_0) P_{\alpha\beta}^{(M)}(k) \tag{10.160}$$

である．式 (10.159) 左辺の平均量が $l = l'$, $m = m'$ のときにしか値を持たないのは，統計平均をとった量に特別な方向がないことが原因である．

量 C_l は，温度ゆらぎの角度パワースペクトルと呼ばれるものである．式 (10.159) における統計平均 $\langle \cdots \rangle$ は，観測したときに得られる値の期待値であり，実際に観測される値は，この値を中心として分散を持っている．式 (10.159) により，統計平均量としては m の値によらず

$$C_l = \left\langle |a_{lm}|^2 \right\rangle \tag{10.161}$$

が成り立つ．実際に観測される温度ゆらぎから角度パワースペクトルを見積もるには，観測値 $|a_{lm}|^2$ を m について平均し，さらにある幅を持った l の範囲でも平均することが多い．各種の初期ゆらぎ成分に対する放射遷移関数 $g_{\alpha l}^{\mathrm{T}(M)}(k, \tau)$ をいったん数値的に求めておけば，あとは初期宇宙モデルなどにより与えられる初期ゆらぎのパワースペクトル $P_{\alpha\beta}^{(M)}(k)$ を，式 (10.160) へ代入して積分することにより，観測量である温度ゆらぎのパワースペクトル C_l を直線的に求めることができる．

10.3.2 視線積分法

放射遷移関数を数値的に求める場合，視線積分法という強力な方法がある．これを以下に説明する．まず，共形時間の時刻 τ から現在時刻までの光学的厚みを与える関数

$$\kappa(\tau) \equiv \int_\tau^{\tau_0} d\tau\, a n_{\mathrm{e}} \sigma_{\mathrm{T}} = \int_\tau^{\tau_0} \frac{d\tau}{\tau_{\mathrm{c}}} \tag{10.162}$$

を定義する．このとき，

$$\kappa' = \frac{d\kappa}{d\tau} = -a n_{\mathrm{e}} \sigma_{\mathrm{T}} \tag{10.163}$$

となる．ここで $\tau \to 0$ のとき $a \propto \tau$, $n_{\mathrm{e}} \propto a^{-3}$ であるから $a n_{\mathrm{e}} \propto \tau^{-2}$ となり，式 (10.162) 右辺の積分はこの極限で正に発散する．一方，現在の宇宙では自由電子

の数密度が無視できる．このことから，式 (10.162) の関数は

$$\kappa(\tau) \to \begin{cases} \infty & (\tau \to 0) \\ 0 & (\tau \to \tau_0) \end{cases} \tag{10.164}$$

という性質を持つ．一般に，時間に依存する任意の関数 $F(\tau)$ について，次の恒等式

$$\frac{d}{d\tau}\left(e^{ik\mu\tau-\kappa}F\right) = e^{ik\mu\tau-\kappa}\left(F' + ik\mu F - \kappa' F\right) \tag{10.165}$$

が成り立つ．ここで

$$F'(\tau) + ik\mu F(\tau) - \kappa' F(\tau) = S(\tau) \tag{10.166}$$

という形の微分方程式があるとき，式 (10.164), (10.165) の性質により，その形式解は

$$F(\tau_0) = \int_0^{\tau_0} d\tau\, e^{ik\mu(\tau-\tau_0)-\kappa} S(\tau) \tag{10.167}$$

で与えられる．

輝度関数の発展方程式 (9.263) は，上で考察した微分方程式 (10.166) の形をしているから，形式的に積分することができる．いま $\boldsymbol{k} \parallel \hat{\boldsymbol{z}}$ となる座標系において，展開係数の発展方程式 (9.267) を導いたときと同様に変形し，光子運動量の角度依存性を球面調和関数で表すことにより，

$$\Theta_{\mathrm{I}}'(\boldsymbol{n},\boldsymbol{k},\tau) + ik\mu\Theta_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{k},\tau) - \kappa'\Theta_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{k},\tau) = \sum_{L,M}(-i)^L\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\,Y_L^M(\boldsymbol{n})S_{\mathrm{I}L}^{(M)}(\boldsymbol{k},\tau) \tag{10.168}$$

が導かれる．ただし $\mu = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}/k$ であり，また右辺の関数 $S_{\mathrm{I}L}^{(M)}$ は，微分方程式の源泉関数になっていて，

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{I}L}^{(M)}(\boldsymbol{k},\tau) = {} & kA\delta_{L1}\delta_{M0} - \frac{k}{3}B^{(0)}\delta_{L0}\delta_{M0} + \frac{k\sqrt{4-M^2}}{3}B^{(M)}\delta_{L2} \\ & - \left(D' - \frac{1}{2}E^{(0)\prime}\right)\delta_{L0}\delta_{M0} - E^{(M)\prime}\delta_{L2} \\ & - \kappa'\left[\tilde{\Theta}_{\mathrm{I}0}^{(0)}\delta_{L0}\delta_{M0} + \left(v_{\mathrm{b}}^{(M)} - B^{(M)}\right)\delta_{L1} + \frac{\tilde{\Theta}_{\mathrm{I}2}^{(M)} - \sqrt{6}\tilde{\Theta}_{\mathrm{E}2}^{(M)}}{10}\delta_{L2}\right] \end{aligned} \tag{10.169}$$

で与えられる．ただし式 (9.275) を用いて計量ゆらぎの変数をヘリシティ基底で表

した．

式 (10.166) の形式解が式 (10.167) であることより，式 (10.168) の形式解は，

$$\Theta_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{k},\tau_0)=\sum_{L,M}(-i)^L\sqrt{\frac{4\pi}{2L+1}}\,Y_L^M(\boldsymbol{n})\int_0^{\tau_0}d\tau\,e^{ik\mu(\tau-\tau_0)-\kappa}S_{\mathrm{I}L}^{(M)}(\boldsymbol{k},\tau) \tag{10.170}$$

で与えられる．この表式を輝度関数に対する視線積分表示という．源泉関数 $S_{\mathrm{I}L}^{(M)}$ は $L=0,1,2$ だけにしか値を持たない．また $M=0,\pm1,\pm2$ はそれぞれスカラー型摂動，ベクトル型摂動，テンソル型摂動に対応する独立成分である．光子の運動量方向 $\boldsymbol{n}$ の依存性は $Y_L^M(\boldsymbol{n})$ と積分中の因子 $e^{ik\mu(\tau-\tau_0)}$ を通じてのみ現れる．すると，球面調和関数の式 (B.68) により，方位角 ϕ への依存性は $e^{iM\phi}$ で与えられる．このことから，輝度関数のスカラー型摂動成分には方位角依存性がなく，ベクトル型に対しては $e^{\pm i\phi}$，テンソル型に対しては $e^{\pm 2i\phi}$ という依存性となる．

式 (10.170) における光子運動量の角度依存性は，因子 $Y_L^M(\boldsymbol{n})e^{ik\mu(\tau-\tau_0)}$ で与えられる．ここで $x=k(\tau_0-\tau)$ とおいてレイリー展開の公式 (B.54) および還元公式 (6.322) を適用すると，

$$\begin{aligned}Y_L^M(\boldsymbol{n})e^{-ix\mu}=&\sum_{l,l'}\sqrt{\frac{2L+1}{2l+1}}\,(2l'+1)(-i)^{l'}j_{l'}(x)\\&\times\langle l',0;L,-M|\,l,-M\rangle\langle l',0;L,0|\,l,0\rangle\,Y_l^M(\boldsymbol{n})\end{aligned} \tag{10.171}$$

が得られる．ここで l,l' についての和は (L,l,l') が 3 角不等式を満たすようなすべての負でない整数についてとる．上式を書き換えると，

$$Y_L^M(\boldsymbol{n})e^{-ix\mu}=\sum_{l=0}^{\infty}(-i)^{l-L}\sqrt{(2L+1)(2l+1)}\,\alpha_l^{(LM)}(x)Y_l^M(\boldsymbol{n}) \tag{10.172}$$

となる．ただし，

$$\alpha_l^{(LM)}(x)\equiv\sum_{l'=|l-L|}^{l+L}(-i)^{l'-l+L}\frac{2l'+1}{2l+1}\langle l',0;L,-M|\,l,-M\rangle\langle l',0;L,0|\,l,0\rangle\,j_{l'}(x) \tag{10.173}$$

と定義した．この量 $\alpha_l^{(LM)}(x)$ が必要となるのは，$L=0,1,2$ および $-L\le M\le L$ の場合だけである．これらの個々の場合について，必要なクレブシュ-ゴーダン係数の具体的な表式 (B.104) を求めて式 (10.173) へ代入し，さらにその結果を式 (B.39), (B.40) に与えられる球ベッセル関数の再帰関係式

$$\frac{j_l(x)}{x} = \frac{j_{l+1}(x) + j_{l-1}(x)}{2l+1} \tag{10.174}$$

$$\frac{d}{dz} j_l(z) = \frac{l j_{l-1}(x) - (l+1) j_{l+1}(x)}{2l+1} \tag{10.175}$$

によって変形する．その計算の結果，

$$\alpha_l^{(00)}(x) = j_l(x), \qquad \alpha_l^{(10)}(x) = j_l'(x), \qquad \alpha_l^{(20)}(x) = \frac{1}{2}\left[j_l(x) + 3 j_l''(x)\right] \tag{10.176}$$

$$\alpha_l^{(1,\pm1)}(x) = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{l(l+1)}\,\frac{j_l(x)}{x}, \quad \alpha_l^{(2,\pm1)}(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{l(l+1)}\,\frac{d}{dx}\left[\frac{j_l(x)}{x}\right] \tag{10.177}$$

$$\alpha_l^{(2,\pm2)}(x) = \sqrt{\frac{3}{8}}\sqrt{(l-1)l(l+1)(l+2)}\,\frac{j_l(x)}{x^2} \tag{10.178}$$

が得られる．ただし $j_l'(x) = dj_l(x)/dx$, $j_l''(x) = d^2 j_l(x)/dx^2$ は球ベッセル関数の微分である．

式 (10.172) を式 (10.170) へ代入することにより，

$$\Theta_{\rm I}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{k}, \tau_0) = \sum_{l=0}^{\infty} (-i)^l \sqrt{4\pi(2l+1)} \sum_M Y_l^M(\boldsymbol{n}) \times \sum_L \int_0^{\tau_0} d\tau\, \alpha_l^{(LM)}\left[k(\tau_0 - \tau)\right] e^{-\kappa} S_{{\rm I}L}^{(M)}(\boldsymbol{k}, \tau) \tag{10.179}$$

となる．これを式 (9.239) と比較することにより，球面調和関数展開の係数が求められ，

$$\tilde{\Theta}_{{\rm I}l}^{(M)}(\boldsymbol{k}, \tau_0) = (2l+1) \sum_L \int_0^{\tau_0} d\tau\, \alpha_l^{(LM)}\left[k(\tau_0 - \tau)\right] e^{-\kappa} S_{{\rm I}L}^{(M)}(\boldsymbol{k}, \tau) \tag{10.180}$$

を得る．

源泉関数 $S_{{\rm I}L}^{(M)}$ は式 (10.169) で与えられる線形摂動量であるから，必ず初期ゆらぎ $X_\alpha^{(M)}(\boldsymbol{k})$ の線形結合で与えられる．そこで，

$$S_{{\rm I}L}^{(M)}(\boldsymbol{k}, \tau) = \sum_\alpha \hat{S}_{\alpha L}^{{\rm T}(M)}(k, \tau) X_\alpha^{(M)}(\boldsymbol{k}) \tag{10.181}$$

と表すことができる．比例係数 $\hat{S}_{\alpha L}^{{\rm T}(M)}(k, \tau)$ は源泉関数 $S_{{\rm I}L}^{(M)}(\boldsymbol{k}, \tau)$ の遷移関数である．これは，各初期ゆらぎの成分について独立に線形発展方程式を解き，その解を式 (10.169) へ代入して求められるものである．式 (10.181) を式 (10.180) へ代入し，放射遷移関数 $g_{\alpha l}^{{\rm T}(M)}$ の定義式 (10.153) と比較すれば，

$$g_{\alpha l}^{\mathrm{T}(M)}(k,\tau_0) = \sum_L \int_0^{\tau_0} d\tau\, \alpha_l^{(LM)}\,[k(\tau_0-\tau)]\, e^{-\kappa}\hat{S}_{\alpha L}^{\mathrm{T}(M)}(k,\tau) \tag{10.182}$$

となることがわかる．これを式 (10.160) に代入すれば，初期ゆらぎパワースペクトルの積分として温度ゆらぎの角度パワースペクトル C_l が得られる．こうして，数値的に解いた摂動変数を，観測量と結びつけることができる．

視線積分表示は，宇宙マイクロ波背景放射ゆらぎの理論予言を数値計算によって求める際に，絶大な威力を発揮する．すなわち，式 (10.180) を利用すると，大きな l に対する光子の多重極係数 Θ_l を求めるために必要な，数値計算の量が激減する．光子のボルツマン階層方程式 (9.267), (9.268) を直接用いると，求めたい l よりも数の多い巨大な連立微分方程式を解かなければならない．だが，視線積分表示に必要な関数 $S_{\mathrm{I}L}^{(M)}$ は，式 (10.169) により $L=2$ までの多重極係数の解と，計量ゆらぎおよびバリオン速度の解だけで求められる．それより大きな l の多重極係数は，式 (10.180) の数値積分により求めることができる．低次の多重極係数は高次の係数の発展からの影響をほとんど受けないので，この方法ではボルツマン階層方程式の最大次数を $l_{\max}=10$ 程度で打ち切って，限られた数の階層方程式だけを解けば十分であることになる．

球ベッセル関数をあらかじめ数値的に求めておくことにより，式 (10.180), (10.182) の視線積分は，数値計算によって十分に速く計算できる．こうして，数十個の連立微分方程式と視線積分により，十分正確な解を求めることができる．これを**視線積分法** (line-of-sight integration approach)[*6]といい，現代では標準的な計算手法になっている．この手法が開発される前は，実質的に数千個以上の連立微分方程式となるボルツマン階層方程式を数値的に解いていたため，非常に長い計算時間を必要とした．視線積分法の開発者自身によって作成された CMBFAST と呼ばれる計算機コードは，ウェブ上に公開されて宇宙マイクロ波背景放射のゆらぎの研究に大きな役割を果たしてきた．現在，CMBFAST の更新と公開は終了しているが，CMBFAST を大幅に拡張・改良した CAMB や CLASS[*7]などの公開コードが広く使われている．CAMB は本章の図 10.1 を描くときにも改変して利用した．

---

*6 U. Seljak and M. Zaldarriaga, *Astrophys. J.*, **469**, 437 (1996).

*7 `http://class-code.net` (J. Lesqourgues)

10.3.3 スカラー型温度ゆらぎ

上に導いた輝度関数に対する一般的な視線積分表示において，スカラー型摂動に着目し，ゲージ不変量を用いた表式を求めることを考える．輝度関数のスカラー型摂動成分は，式 (10.170) における $M=0$ の寄与で与えられる．この場合 $Y_L^0(\boldsymbol{n})$ は，式 (B.76) によりルジャンドル多項式 $P_L(\mu)$ に帰着する．ただし $\mu=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}/k$ である．こうしてスカラー型摂動成分の視線積分表示は

$$\Theta_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{S})}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{k},\tau_0)=\sum_{L=0}^{2}(-i)^L P_L(\mu)\int_0^{\tau_0}d\tau\, e^{ik\mu(\tau-\tau_0)-\kappa}S_{\mathrm{I}L}(\boldsymbol{k},\tau) \tag{10.183}$$

となる．ただし，源泉関数のスカラー型摂動成分を $S_{\mathrm{I}L}\equiv S_{\mathrm{I}L}^{(0)}$ と略記した．式 (10.169) および式 (9.273), (9.275) により，源泉関数の具体形は

$$S_{\mathrm{I}0}=-D'+\frac{k^2}{3}\left(B^{(\mathrm{S})}+E^{(\mathrm{S})\prime}\right)-\kappa'\tilde{\Theta}_{\mathrm{I}0} \tag{10.184}$$

$$S_{\mathrm{I}1}=kA+\kappa'\left(kv_{\mathrm{b}}^{(\mathrm{S})}-kB^{(\mathrm{S})}\right) \tag{10.185}$$

$$S_{\mathrm{I}2}=-\frac{2k^2}{3}\left(B^{(\mathrm{S})}+E^{(\mathrm{S})\prime}\right)-\frac{\kappa'}{10}\left(\tilde{\Theta}_{\mathrm{I}2}-\sqrt{6}\tilde{\Theta}_{\mathrm{E}2}\right) \tag{10.186}$$

で与えられる．

式 (10.183) の右辺にルジャンドル多項式の具体形の式 (9.153) を代入してから，恒等式

$$\mu^n e^{ik\mu(\tau-\tau_0)}=\frac{1}{(ik)^n}\frac{d^n}{d\tau^n}e^{ik\mu(\tau-\tau_0)} \tag{10.187}$$

を用いると，

$$\tilde{\Theta}_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{S})}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{k},\tau_0)=\int_0^{\tau_0}d\tau\, e^{-\kappa}\left(S_{\mathrm{I}0}+\frac{1}{2}S_{\mathrm{I}2}-\frac{1}{k}S_{\mathrm{I}1}\frac{d}{d\tau}+\frac{3}{2k^2}S_{\mathrm{I}2}\frac{d^2}{d\tau^2}\right)e^{ik\mu(\tau-\tau_0)} \tag{10.188}$$

が得られる．上式は，式 (10.179) に式 (10.176) を代入してから，式 (B.76), (B.54) を用いることによっても導くことができる．式 (10.188) 右辺で，積分中に現れる時間微分を部分積分し，表面項については式 (10.164) を用いると，

$$\Theta_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{k},\tau_0) = -\frac{1}{k}S_{\mathrm{I}1}(\boldsymbol{k},\tau_0) - \frac{3}{2k^2}S_{\mathrm{I}2}{}'(\boldsymbol{k},\tau_0) + \frac{3i\mu}{2k}S_{\mathrm{I}2}(\boldsymbol{k},\tau_0) + \int_0^{\tau_0} d\tau\, e^{ik\mu(\tau-\tau_0)}\mathscr{S}_{\mathrm{I}l}(\boldsymbol{k},\tau) \quad (10.189)$$

が得られる．ただし

$$\mathscr{S}_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{k},\tau) = e^{-\kappa}\left(S_{\mathrm{I}0} + \frac{1}{2}S_{\mathrm{I}2}\right) + \frac{1}{k}\left(e^{-\kappa}S_{\mathrm{I}1}\right)' + \frac{3}{2k^2}\left(e^{-\kappa}S_{\mathrm{I}2}\right)'' \quad (10.190)$$

と定義した．式 (10.189) 右辺の最初の 3 項は表面項からの寄与である．

式 (10.189) の表面項の部分へ式 (10.184)–(10.186) を代入し，式 (10.164) の性質を用いて変形すると，

$$\Theta_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{k},\tau_0) = \left[-A + \left(B^{(\mathrm{S})} + E^{(\mathrm{S})\prime}\right)' - ik\mu\left(B^{(\mathrm{S})} + E^{(\mathrm{S})\prime}\right)\right]\Big|_{\tau_0} + \int_0^{\tau_0} d\tau\, e^{ik\mu(\tau-\tau_0)}\mathscr{S}_{\mathrm{I}l}(\boldsymbol{k},\tau) \quad (10.191)$$

が得られる．さらに (10.190) へ式 (10.184)–(10.186) を代入すれば，

$$\mathscr{S}_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{k},\tau) = e^{-\kappa}(A' - D') + g\left(\tilde{\Theta}_{\mathrm{I}0} + A + \frac{1}{4}\Xi\right) - \left[g\left(v_{\mathrm{b}}^{(\mathrm{S})} - B^{(\mathrm{S})}\right)\right]' + \frac{3}{4k^2}(g\Xi)'' - \left[e^{-\kappa}\left(B^{(\mathrm{S})} + E^{(\mathrm{S})\prime}\right)\right]'' \quad (10.192)$$

が得られる．ただし

$$\Xi \equiv \frac{\tilde{\Theta}_{\mathrm{I}2} - \sqrt{6}\tilde{\Theta}_{\mathrm{E}2}}{5} \quad (10.193)$$

および

$$g(\tau) \equiv -\kappa' e^{-\kappa} \quad (10.194)$$

と定義した．上の関数 $g(\tau)$ を**視程関数** (visibility function) という．式 (10.164) の性質，および $\kappa'(\tau) \to 0$ $(\tau \to \tau_0)$ となることから，式 (10.194) で定義される視程関数は $\tau \to 0, \tau \to \tau_0$ の両極限でゼロとなる．この関数は，電子の密度 n_{e} が大きく変化する宇宙の再結合の時期に，最大となる．また，$g(\tau) = de^{-\kappa}/d\tau$ となることから，積分条件

$$\int_0^{\tau_0} d\tau\, g(\tau) = 1 \quad (10.195)$$

を満たす．

式 (7.148), (7.149), (9.198), (9.277), (9.279) を用いると，式 (10.191), (10.192) はゲージ不変量だけを用いて表され，

$$\Theta^{(\mathrm{GI})}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{k},\tau_0) = -\Phi(\boldsymbol{k},\tau_0) + \int_0^{\tau_0} d\tau\, e^{ik\mu(\tau-\tau_0)} \mathscr{S}_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{k},\tau) \tag{10.196}$$

および

$$\mathscr{S}_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{k},\tau) \equiv e^{-\kappa}(\Phi' - \Psi') + g\left(\Theta_0^{(\mathrm{GI})} + \Phi + \frac{1}{4}\Xi\right) - \left(g v_{\mathrm{b}}^{(\mathrm{GI})}\right)' + \frac{3}{4k^2}(g\Xi)'' \tag{10.197}$$

という結果を得る．

ゲージ不変な輝度関数をルジャンドル展開した式 (9.278) の係数 $\Theta_l^{(\mathrm{GI})}$ は，ルジャンドル多項式の直交性 (B.51) により

$$\Theta_l^{(\mathrm{GI})}(\boldsymbol{k},\tau_0) = \frac{i^l(2l+1)}{2}\int_{-1}^{1} d\mu P_l(\mu)\Theta^{(\mathrm{GI})}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{k},\tau_0) \tag{10.198}$$

で与えられる．ここで積分公式 (B.53) および球ベッセル関数 $j_l(x)$ の性質 $j_l(-x) = (-1)^l j_l(x)$ を用いると，

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} d\mu P_l(\mu) e^{ik\mu(\tau-\tau_0)} = (-i)^l j_l\left[k(\tau_0-\tau)\right] \tag{10.199}$$

が成り立つ．式 (10.198) の右辺へ式 (10.196) を代入してから上式を用いると

$$\Theta_l^{(\mathrm{GI})}(\boldsymbol{k},\tau_0) = -\delta_{l0}\Phi(\boldsymbol{k},\tau_0) + (2l+1)\int_0^{\tau_0} d\tau\, j_l\left[k(\tau_0-\tau)\right]\mathscr{S}_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{k},\tau) \tag{10.200}$$

が得られる．この式は，一般的な式 (10.180) を部分積分することによって導くことも可能である．

式 (9.278) の展開係数 $\Theta_l^{(\mathrm{GI})}$ は，式 (9.239) の展開において $m = 0$ とおいたものに対応する．また，式 (9.279) のように輝度関数でゲージ依存するのは単極成分と双極成分だけであり，$l \geq 2$ に対して $\Theta_{\mathrm{I}l}^{(0)} = \Theta_l^{(\mathrm{GI})}$ である．したがって $l = 0, 1$ を除けば，式 (10.153) におけるスカラー型摂動成分 $M = 0$ の展開は

$$\Theta_l^{(\mathrm{GI})}(\boldsymbol{k},\tau) = (2l+1)\sum_\alpha g_{\alpha l}^{\mathrm{T}(0)}(k,\tau) X_\alpha^{(0)}(\boldsymbol{k}) \qquad (l \geq 2) \tag{10.201}$$

となる．また，関数 $\mathscr{S}_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{k},\tau)$ は線形摂動量であるから，初期ゆらぎの各独立成分に対する線形結合で与えられ，

$$\mathscr{S}_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{k},\tau) = \sum_\alpha \hat{\mathscr{S}}_{\mathrm{I}\alpha}(\boldsymbol{k},\tau) X_\alpha^{(0)}(\boldsymbol{k}) \tag{10.202}$$

と表すことができる．比例係数 $\hat{\mathscr{S}}_{\mathrm{I}\alpha}(k,\tau)$ は関数 $\mathscr{S}(\boldsymbol{k},\tau)$ の遷移関数である．式 (10.200)–(10.202) により，放射遷移関数は

$$g_{\alpha l}^{\mathrm{T}(0)}(k,\tau_0) = \int_0^{\tau_0} d\tau \hat{\mathscr{S}}_{1\alpha}(\boldsymbol{k},\tau) j_l\left[k(\tau_0-\tau)\right] \qquad (l \geq 2) \tag{10.203}$$

で与えられる．これを式 (10.160) に代入すれば，$l \geq 2$ に対する温度パワースペクトル C_l が得られる．ここで単極成分 $l = 0$ と双極成分 $l = 1$ の輝度関数はゲージ依存するため，上と同様にして得られるパワースペクトル C_l $(l = 0, 1)$ もゲージ依存する量になる．温度ゆらぎの単極子成分や双極子成分は観測者の場所や速度によって変化する量なので，これらは宇宙論的な情報を持たない．このため，宇宙論的な解析では $l = 0, 1$ の成分を考えないことが多い．

10.3.4 テンソル型の温度ゆらぎ

次に，輝度関数の視線積分表示におけるテンソル型摂動成分に着目し，その具体的表式を導いておく．テンソル型摂動はそのままゲージ不変量である．式 (10.170) に対するテンソル型摂動の寄与は $M = \pm 2$ の項に対応し，その寄与を $\tilde{\Theta}_{\mathrm{I}}^{(\pm 2)}$ と表記する．式 (10.169) により $L = 0, 1$ についての源泉関数 $S_{\mathrm{I}0}^{(\pm 2)}$, $S_{\mathrm{I}1}^{(\pm 2)}$ はゼロであるから，テンソル型摂動成分には $L = 2$ だけが寄与し，

$$\tilde{\Theta}_{\mathrm{I}}^{(\pm 2)}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{k},\tau_0) = -\sqrt{\frac{4\pi}{5}}\, Y_2^{\pm 2}(\boldsymbol{n}) \int_0^{\tau_0} d\tau\, e^{ik\mu(\tau-\tau_0)-\kappa} S_{\mathrm{I}2}^{(\pm 2)}(\boldsymbol{k},\tau) \tag{10.204}$$

となる．ただし，

$$S_{\mathrm{I}2}^{(\pm 2)} = -E^{(\pm 2)\prime} - \frac{\kappa'}{10}\left(\tilde{\Theta}_{\mathrm{I}2}^{(\pm 2)} - \sqrt{6}\tilde{\Theta}_{\mathrm{E}2}^{(\pm 2)}\right) \tag{10.205}$$

である．波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ の方向を極軸にした極座標系を (θ, ϕ) とすれば，式 (10.204) において角度依存性を与える因子は，球面調和関数の具体形 (B.71) により，

$$-\sqrt{\frac{4\pi}{5}}\, Y_2^{\pm 2}(\boldsymbol{n}) = -\sqrt{\frac{3}{8}}\, e^{\pm 2i\phi} \sin^2\theta \tag{10.206}$$

と表される．

テンソル型摂動に対する多重極展開の係数は，式 (10.180) に $M = \pm 2$ を代入したもので与えられる．式 (10.178) を用いると，

$$\tilde{\Theta}_{\mathrm{I}l}^{(\pm 2)}(\boldsymbol{k},\tau_0) = \sqrt{\frac{3}{8}}(2l+1)\sqrt{(l-1)l(l+1)(l+2)} \int_0^{\tau_0} d\tau\, \frac{j_l\left[k(\tau_0-\tau)\right]}{k^2(\tau_0-\tau)^2} e^{-\kappa} S_{\mathrm{I}2}^{(\pm 2)}(\boldsymbol{k},\tau) \tag{10.207}$$

となる．これが輝度関数のテンソル型成分に対する視線積分表示である．

10.3.5 温度ゆらぎのパワースペクトル

宇宙マイクロ波背景放射の温度ゆらぎに対し，数値計算により求めた角度パワースペクトル C_l の理論予言の例を，図 10.2 に示す．ただし，宇宙論パラメータの値は付録 A.4 に与えられる中心値を用いた．左図では，初期条件として標準的な断熱ゆらぎを仮定した．実線がスカラー型成分の寄与に対応し，破線がテンソル型成分の寄与に対応する．テンソル型成分に対する振幅の値は，現在のところ観測的に求められていない．図に示したテンソル型成分の振幅は，式 (8.172) の最初の等式で定義される初期ゆらぎのテンソル・スカラー比の値を $r = 1$ としたものである．テンソル型成分の全振幅は，この比 r の値に比例する．テンソル・スカラー比には観測的な上限が求められていて，95% の確度でほぼ $r < 0.1$ を満たす．したがって，実際のテンソル型成分に対する全振幅は，この図の 1/10 程度よりも小さい．

一方，右図に示されるように，ゆらぎの初期条件によって温度ゆらぎの角度パワースペクトルの形は大きく異なる．とくに $l = 200$ 付近に現れる大きなピークは，断熱ゆらぎに特徴的なものである．すなわち，温度ゆらぎの角度パワースペクトルを測定することで，現実の宇宙におけるゆらぎの初期条件を選別できる．後にくわしく見るように，観測との比較によると，断熱ゆらぎの初期条件だけが現実の宇宙をよく説明する．等曲率モードは，もし存在するとしても寄与が観測的に無視できるほど小さい．以下では，初期条件が断熱ゆらぎのみからなる場合を，標準的な初期条件と考える．

数値計算の結果を定性的に理解するため，スカラー型成分に対する視線積分表示の式 (10.200) の振る舞いを近似的に調べてみる．光学的厚み $\kappa(\tau)$ を与える式 (10.162) の被積分関数 $an_{\mathrm{e}}\sigma_{\mathrm{T}}$ は，脱結合時 $\tau = \tau_{\mathrm{dec}}$ において急速にゼロとなることに注目する．これを一瞬でゼロになるものと近似的に考える．このとき，式 (10.194) で定義される視程関数 $g(\tau)$ は $\tau = \tau_{\mathrm{dec}}$ に鋭いピークを持ち，その他の時刻ではほぼゼロとなる．条件式 (10.195) を考慮すると，視程関数は近似的に $g(\tau) \simeq \delta_{\mathrm{D}}(\tau - \tau_{\mathrm{dec}})$ というデルタ関数で表すことができる．

また，非等方応力に対応する 2 次の多重極係数 $\tilde{\Theta}_{\mathrm{I}2}$ や偏極自由度 $\Theta_{\mathrm{E}2}$ は，他の変数に比べて小さい値をとるため近似的に無視して，式 (10.193) で定義される量を $\Xi \simeq 0$ とする．さらに脱結合時の間際まで強結合極限が成り立つと近似すると，式 (10.14) により $v_{\mathrm{b}}^{(\mathrm{GI})} \simeq v_{\gamma}^{(\mathrm{GI})}$ とおける．以上の近似を式 (10.197) の関数 $\mathscr{S}_{\mathrm{I}}(k,\tau)$ に適用し，さらにそれを式 (10.200) へ代入すると，単極成分を除いた $l \geq 1$ に対し

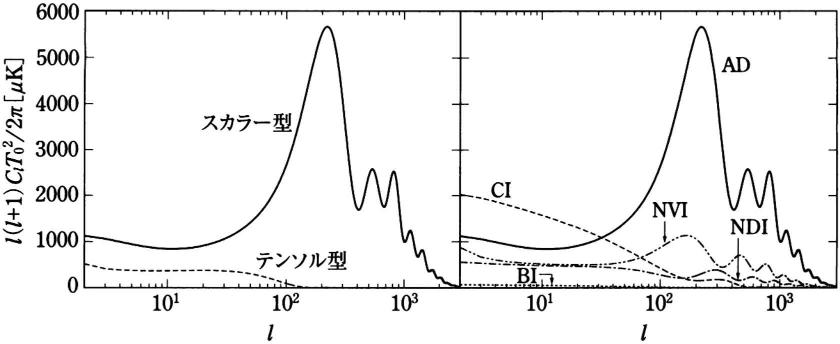


図 10.2 宇宙マイクロ波背景放射の温度ゆらぎに対する，角度パワースペクトルの理論予言．左図は断熱ゆらぎの場合で，実線がスカラー型成分の寄与を表し，破線がテンソル型成分の寄与を表す．テンソル型成分の振幅には $r = 1$ を用いた．右図は，異なる初期条件に対するスカラー型成分を表す．実線は左図と同じ断熱ゆらぎ (AD) であり，破線は CDM 等曲率モード (CI)，点線はバリオン等曲率モード (BI)，1 点鎖線はニュートリノ密度・等曲率モード (NDI)，2 点鎖線はニュートリノ速度・等曲率モード (NVI) にそれぞれ対応する．いずれの場合にも重力レンズ効果は含めていない．計算には公開コード CAMB を用いた．

て

$$\frac{\Theta_l^{(\mathrm{GI})}(\boldsymbol{k},\tau_0)}{2l+1} \simeq \left[\frac{1}{4}\delta_\gamma^{(\mathrm{GI})}(\boldsymbol{k},\tau_{\mathrm{dec}}) + \Phi(\boldsymbol{k},\tau_{\mathrm{dec}})\right] j_l(kx_{\mathrm{dec}}) - kv_\gamma^{(\mathrm{GI})}(\boldsymbol{k},\tau_{\mathrm{dec}})\left[j_{l-1}(kx_{\mathrm{dec}}) - \frac{l+1}{kx_{\mathrm{dec}}} j_l(kx_{\mathrm{dec}})\right] + \int_0^{\tau_0} d\tau\, e^{-\kappa}\left[\Phi'(\boldsymbol{k},\tau) - \Psi'(\boldsymbol{k},\tau)\right] j_l(x_{\mathrm{dec}}) \qquad (10.208)$$

が得られる．ただし $x_{\mathrm{dec}} = \tau_0 - \tau_{\mathrm{dec}}$ であり，また，式 (B.40) による球ベッセル関数の微分公式 $dj_l(x)/dx = j_{l-1}(x) - (l+1)j_l(x)/x$ を用いた．式 (10.150), (10.151) により，上の量の l 依存性はそのまま温度ゆらぎの l 依存性の特徴を与える．

観測される宇宙マイクロ波背景放射の光子が最後にトムソン散乱を行った場所の集合は，ほぼ球面をなす．この面を宇宙マイクロ波背景放射光子の**最終散乱面** (last scattering surface) という．上に導入した $x_{\mathrm{dec}} = \tau_0 - \tau_{\mathrm{dec}}$ は，観測者から最終散乱面までの共動距離に対応する量である．式 (10.208) 右辺の第 1 項と第 2 項は，最終散乱面上のゆらぎを直接反映している．このうち第 1 項は，最終散乱面における光子の密度ゆらぎと重力赤方偏移効果の合わさった効果を表している．また第 2 項は，最終散乱面における光子の速度が引き起こすドップラー効果を表して

いる．さらに第 3 項は，光子が最終散乱面から観測者へ届く経路上のゆらぎを足し合わせたもので，計量ゆらぎが時間変化すると温度ゆらぎが発生することを表している．

第 2 項の表すドップラー効果は，どのスケールにおいても角度パワースペクトルにあまり顕著な寄与をしない．脱結合時に波長がハッブル半径を超えているような大角度スケールに着目したとき，第 1 項の寄与は**ザックス-ヴォルフェ効果** (Sachs-Wolfe effect) と呼ばれている．また，第 3 項は**積分ザックス-ヴォルフェ効果** (integrated Sachs-Wolfe effect) と呼ばれる．これら 2 種類のザックス-ヴォルフェ効果は，l が小さい大角度パワースペクトルにおける主要な効果となる．物質優勢期には計量ゆらぎ Φ, Ψ が時間的に一定となるため，積分ザックス-ヴォルフェ効果は現れない．光子の脱結合直後は，まだ完全に物質優勢になりきっていないためにポテンシャルが時間変化する．このことは図 10.1 においても見てとれる．このために早期の宇宙で積分ザックス-ヴォルフェ効果が起きる．これを**早期積分ザックス-ヴォルフェ効果** (early-time integrated Sachs-Wolfe effect) という．一方，宇宙定数 Λ もしくは曲率 K がゼロでない場合，光子の脱結合時よりずっと現在時刻に近い後期宇宙でポテンシャルが時間変化し，積分ザックス-ヴォルフェ効果が生じる．これを**後期積分ザックス-ヴォルフェ効果** (late-time integrated Sachs-Wolfe effect) という．

光子の脱結合時に波長がハッブル半径程度以下になるような中角度スケールでは，光子の密度ゆらぎ $\delta_\gamma^{(\mathrm{GI})}$ の音響振動が顕著である．これが式 (10.208) の右辺第 1 項に大きく寄与し，角度パワースペクトルには振動的な特徴が現れる．式 (10.29), (10.31) により，初期条件が断熱ゆらぎの場合は，$\cos kr_{\mathrm{dec}} = \pm 1$ を満たすときに光子密度ゆらぎの絶対値が大きくなる．ただし $r_{\mathrm{dec}} = r_{\mathrm{s}}(\tau_{\mathrm{dec}})$ は脱結合時の音響ホライズンである．この条件は $k = m\pi/r_{\mathrm{dec}}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ に等しい．球ベッセル関数 $j_l(x)$ は l がある程度大きいとき $x \simeq l$ にピークを持つから，式 (10.208) により，ほぼ $l \simeq kx_{\mathrm{dec}} \simeq m\pi x_{\mathrm{dec}}/r_{\mathrm{dec}}$ の条件を満たす角度スケールで振幅が大きくなり，角度パワースペクトルにピークが現れる．こうして，温度ゆらぎの角度パワースペクトルには周期的にピークが現れる．ただし上のピーク位置見積りは曲率ゼロ $(K = 0)$ の宇宙モデルの場合である．正の曲率 $(K > 0)$ がある場合には，同じ物理スケールに対応する見込み角度が大きくなるから，ピークの角度スケールが左にずれる．逆に負の曲率 $(K < 0)$ があるときはピークが右にずれる．一方，等曲率ゆらぎの場合には，上の条件が $\sin kr_{\mathrm{dec}} = \pm 1$ と変更され，角度パワースペクトルに現れる周期的なピークの位置の見積りは $l \simeq (m + 1/2)\pi$ となる．つまり，初期ゆらぎ

の性質によって角度パワースペクトルに現れる周期的なピークの位置が異なるという特徴がある．l が十分に大きい小角度スケール側では，拡散減衰により光子密度ゆらぎの振幅が小さくなるため，温度ゆらぎの角度パワースペクトルの振幅は l が大きいほど減衰する．

大角度スケールで主要な寄与をするザックス-ヴォルフェ効果については，比較的簡単な解析的近似式を導くことができる．最終散乱面の時刻を近似的に完全な物質優勢期とみなし，ゆらぎの波長スケールはハッブル半径より大きいとする．このとき 2 成分近似の解 (9.139) を用いると，全密度ゆらぎと重力ポテンシャルの関係は $\delta^{(\mathrm{GI})} = -2\Phi$ で与えられる．さらに，断熱ゆらぎの場合を考えると，物質優勢期の超ハッブル・スケールにおいて $\delta_\gamma^{(\mathrm{GI})} \simeq \delta_\mathrm{r}^{(\mathrm{GI})} = 4\delta_\mathrm{m}^{(\mathrm{GI})}/3 \simeq 4\delta^{(\mathrm{GI})}/3$ であるから $\delta_\gamma^{(\mathrm{GI})}/4 + \Phi \simeq \Phi/3$ となる．したがって式 (10.208) へのザックス-ヴォルフェ効果の寄与は

$$\frac{\Theta_l^{\mathrm{SW}}(\boldsymbol{k},\tau_0)}{2l+1} = \frac{1}{3}\Phi(\boldsymbol{k},\tau_\mathrm{dec})j_l(kx_\mathrm{dec}) \tag{10.209}$$

である．

ここで，密度ゆらぎに対応するバーディーン変数 $\Delta(\boldsymbol{k},\tau)$ の現在時刻 $\tau = \tau_0$ におけるパワースペクトル $P(k)$ を

$$\langle \Delta(\boldsymbol{k},\tau_0)\Delta(\boldsymbol{k}',\tau_0)\rangle = (2\pi)^3\delta_\mathrm{D}^3(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')P(k) \tag{10.210}$$

で定義する．物質優勢期以降において，バーディーン変数の時間発展は式 (9.63) で与えられる．曲率 K が無視できる場合，それは

$$\Delta(\boldsymbol{k},\tau_0) = -\frac{2D_+(\tau_0)}{3{H_0}^2\Omega_\mathrm{m0}}k^2\Phi_\mathrm{m}(\boldsymbol{k}) \tag{10.211}$$

となる．ただし Ω_m0 は物質の密度パラメータであり，Φ_m は物質優勢期における時間的に一定の重力ポテンシャルである．線形成長因子 D_+ は，物質優勢期において $D_+(\tau) = a(\tau)$ となるように規格化されている．光子の脱結合時を物質優勢期と近似したので，$\Phi(\boldsymbol{k},\tau_\mathrm{dec}) \simeq \Phi_\mathrm{m}(\boldsymbol{k})$ とおくことができる．また，式 (9.45), (10.84) により，超ハッブル・スケールでは

$$\Phi_\mathrm{m}(\boldsymbol{k}) = \frac{9}{10}\Phi_\mathrm{i}(\boldsymbol{k}) = -\frac{9}{15+4R_\nu}\zeta_\mathrm{i}(\boldsymbol{k}) \tag{10.212}$$

である．式 (10.210)–(10.212) により，初期ゆらぎ ζ_i に対するパワースペクトル $P_{\zeta\mathrm{i}}$ を線形密度ゆらぎのパワースペクトル $P(k)$ で表すことができて，

$$P_{\zeta\mathrm{i}}(k) = \left[\frac{15+4R_\nu}{6}\,\frac{{H_0}^2\Omega_{\mathrm{m0}}}{D_+(\tau_0)}\right]^2 \frac{P(k)}{k^4} \tag{10.213}$$

となる．ただし，いま超ハッブル・スケールを考えているので密度ゆらぎの遷移関数は $T(k)=1$ である．

一方，いま初期ゆらぎ変数が $\zeta_\mathrm{i}(\boldsymbol{k})$ だけの断熱ゆらぎを考えているので，式 (10.201) で与えられる放射遷移関数は 1 つだけであり，それを $g_l^{\mathrm{SW}}(k,\tau)$ と表記する．すると，式 (10.209), (10.212) により，

$$g_l^{\mathrm{SW}}(k,\tau_0) = \frac{\Theta_l^{\mathrm{SW}}(\boldsymbol{k},\tau_0)}{(2l+1)\zeta_\mathrm{i}(\boldsymbol{k})} = -\frac{3}{15+4R_\nu}\,j_l(kx_{\mathrm{dec}}) \tag{10.214}$$

が得られる．初期条件が断熱ゆらぎだけの場合，角度パワースペクトル C_l を与える式 (10.160) のスカラー型摂動成分は

$$C_l^{\mathrm{SW}} = 4\pi\int\frac{k^2dk}{2\pi^2}\left[g_l^{\mathrm{SW}}(k,\tau_0)\right]^2 P_{\zeta\mathrm{i}}(k) \tag{10.215}$$

となる．ここへ式 (10.213), (10.214) を代入することにより，ザックス-ヴォルフェ効果による角度パワースペクトルは

$$C_l^{\mathrm{SW}} = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{{H_0}^2\Omega_{\mathrm{m0}}}{D_+(\tau_0)}\right]^2\int\frac{dk}{k^2}\,[j_l(kx_{\mathrm{dec}})]^2\,P(k) \tag{10.216}$$

で与えられる．

曲率ゆらぎの初期パワースペクトル $P_{\zeta\mathrm{i}}(k)$ は，式 (8.126), (8.128) により，初期ゆらぎのスペクトル指数 n_s を用いて $P_{\zeta\mathrm{i}}(k) \propto k^{n_\mathrm{s}-4}$ と表される．したがって式 (10.213) により，超ハッブル・スケールにおける密度パワースペクトルの波数依存性は $P(k)=Ak^{n_\mathrm{s}}$ となる．このとき式 (10.216) は解析的に積分できて，

$$C_l^{\mathrm{SW}} = \frac{A{x_{\mathrm{dec}}}^{1-n_\mathrm{s}}}{8\sqrt{\pi}}\left[\frac{{H_0}^2\Omega_{\mathrm{m0}}}{D_+(\tau_0)}\right]^2\frac{\Gamma[(3-n_\mathrm{s})/2]\,\Gamma[l+(n_\mathrm{s}-1)/2]}{\Gamma[(4-n_\mathrm{s})/2]\,\Gamma[l+(5-n_\mathrm{s})/2]} \tag{10.217}$$

という結果を得る．ただし $\Gamma(x)$ はガンマ関数である．とくに，スケール不変スペクトルを与える $n_\mathrm{s}=1$ の場合はハリソン-ゼルドビッチ・スペクトル (Harrison-Zel'dovich spectrum) とも呼ばれる．この場合には，

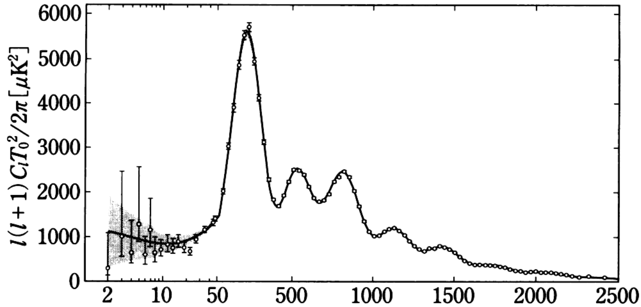


図 10.3 宇宙マイクロ波背景放射の観測衛星 Planck によって得られた，温度ゆらぎの角度パワースペクトル．誤差棒つきの記号が観測値で，実線は理論曲線．グレーの領域は，理論的に期待されるデータのばらつく範囲を表す (Planck Collaboration, arXiv:1303.5062 より転載)．

$$l(l+1)C_l^{\mathrm{SW}} = \frac{A}{4\pi}\left[\frac{{H_0}^2\Omega_{\mathrm{m0}}}{D_+(\tau_0)}\right]^2 \qquad (n_{\mathrm{s}} = 1) \tag{10.218}$$

が得られる．スケール不変なハリソン-ゼルドビッチ・スペクトルの場合，温度ゆらぎの角度パワースペクトルは，大角度スケール側で $l(l+1)C_l$ が l によらず一定になるという顕著な特徴がある．ただし，初期ゆらぎがスケール不変スペクトルに近くても，宇宙定数 Λ や曲率 K が無視できない場合は積分ザックス-ヴォルフェ効果により，大角度スケール側の $l(l+1)C_l$ にも傾きが生じる．

温度ゆらぎの角度パワースペクトルには，上に述べた基本的な物理効果の他にも，最終散乱面から観測者まで光子が伝播する途中で受けるさまざまな 2 次的効果がある．これらについてもくわしい研究が行われている．たとえば，図 10.2 には含まれていない効果として，最終散乱面よりも手前にある密度ゆらぎが起こす重力レンズ効果により，小スケール側のスペクトルが少し大きくなるという効果がある．これについても定量的な理論予言ができるようになっている．宇宙マイクロ波背景放射の理論と観測の比較研究は最近大きく進み，宇宙論パラメータの値を精密に決定するのに重要な役割を果たしている．

最近の観測例として，観測衛星 Planck*8による温度ゆらぎの測定結果を図 10.3 に示す．理論曲線は，観測のデータ点にもっともよく合うように宇宙論パラメータを選んだものである．理論的に自由に選べるパラメータ数よりはるかに多いデータ

*8 http://www.esa.int/Our_Activities/Space_Science/Planck

点が，広い範囲で理論曲線と見事に一致している．このような精密な観測により，宇宙論パラメータを非常に精度よく決めることができる．

ちなみに，理論曲線をこの Planck のデータに合わせるとき，自由に動かした独立な理論パラメータは，バリオンの物理的密度 $\Omega_{b0}h^2$，コールド・ダークマターの物理的密度 $\Omega_{c0}h^2$，宇宙の再電離によるトムソン散乱の光学的厚み τ，スカラー型の初期スペクトル指数 n_s，初期曲率ゆらぎの振幅 A_s の 6 つだけである．その他の理論パラメータは標準的な値に固定してある．たとえば，宇宙の曲率はゼロ $(K = 0)$ としてあり，また，断熱ゆらぎ以外のスカラー型初期ゆらぎは含まれていない．また，初期ゆらぎのテンソル型成分も含まれていない．すなわち，これらの量はデータの誤差範囲で無視できるほど小さい．付録 A.4 に掲げられている宇宙論パラメータの値の決定には，この Planck による観測の解析が大きな役割を果たした．

10.3.6 宇宙マイクロ波背景放射の偏光

宇宙マイクロ波背景放射の偏光も，重要な観測量である．偏光は天球面上に方向を持つ量で，天球面上で単なる実数値となる温度ゆらぎよりも，解析が複雑になる*9．式 (6.268) からわかるように，光子の直線偏光を表すストークス・パラメータ Q, U を複素化した量 $Q \pm iU$ は球面上の関数としてスピン ±2 を持つ．強度に対応するストークス・パラメータ I により規格化した量 $(Q \pm iU)/4I$ がよく用いられる．球座標 (θ, ϕ) の方向に観測されるストークス・パラメータの値を，スピン球面調和関数により

$$\frac{Q \pm iU}{4I}(\theta, \phi) = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} a_{lm}^{\pm}\ {}_{\pm 2}Y_l^m(\theta, \phi) = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left(a_{lm}^{\mathrm{E}} \pm i a_{lm}^{\mathrm{B}}\right)\ {}_{\pm 2}Y_l^m(\theta, \phi) \tag{10.219}$$

と展開する．ただし

$$a_{lm}^{\mathrm{E}} = \frac{a_{lm}^{+} + a_{lm}^{-}}{2}, \qquad a_{lm}^{\mathrm{B}} = \frac{a_{lm}^{+} - a_{lm}^{-}}{2i} \tag{10.220}$$

はそれぞれ偏光 E モードおよび偏光 B モードと呼ばれる係数である．これらの展開係数が，偏光の観測量となる．

偏光面上におけるパリティ変換において，ストークス・パラメータは式 (6.269)

---

*9 M. Zaldarriaga and U. Seljak, *Phys. Rev.* D **55**, 1830 (1997); M. Kamionkowski, A. Kosowski and A. Stebbins, *Phys. Rev.* D **55**, 7368 (1997); W. Hu and M. White, *Phys. Rev.* D **56**, 596 (1997).

の変換をする．したがって，このとき式 (10.219) の ± 記号が反転する．一方，スピン球面調和関数については，空間反転変換に対して式 (B.117) が成り立つ．空間反転は偏光面上でパリティ変換となるから，パリティ変換において ${}_sY_l^m \to (-1)^l\,{}_{-s}Y_l^m$ と変換する．すると，上の展開係数 $a_{lm}^{\pm}$ は空間反転について $a_{lm}^{\pm} \to (-1)^l a_{lm}^{\mp}$ と変換する．したがって，このとき式 (10.220) の係数は

$$a_{lm}^{\mathrm{E}} \to (-1)^l a_{lm}^{\mathrm{E}}, \qquad a_{lm}^{\mathrm{B}} \to (-1)^{l+1} a_{lm}^{\mathrm{B}} \tag{10.221}$$

と変換する．

展開式 (9.240) により，任意の時空点 $(\boldsymbol{x},\tau)$ における直線偏光は，変数

$$\Theta_{\mathrm{Q}}^{\pm}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{x},\tau) = \sum_{l,m}(-i)^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\, \Theta_{\mathrm{Q}\,l}^{\pm(m)}(\boldsymbol{k},\tau)\, {}_{\pm2}Y_l^m(\boldsymbol{n}) \tag{10.222}$$

によって与えられる．観測者の位置を座標の原点にとると，式 (6.265), (9.232) と線形近似により，観測される直線偏光は

$$\frac{Q \pm iU}{4I} = \sqrt{2}\,\Theta_{\mathrm{Q}}^{\pm}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},\tau_0) \tag{10.223}$$

と表される．式 (10.223) へ式 (10.222) を代入し，展開式 (10.219) と比較すれば，

$$a_{lm}^{\pm} = (-i)^l \sqrt{\frac{8\pi}{2l+1}} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, \Theta_{\mathrm{Q}\,l}^{\pm(m)}(\boldsymbol{k},\tau_0) \tag{10.224}$$

となる．これと式 (9.242), (10.220) により

$$a_{lm}^{\mathrm{E}} = (-i)^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, \Theta_{\mathrm{E}\,l}^{(m)}(\boldsymbol{k},\tau_0) \tag{10.225}$$

$$a_{lm}^{\mathrm{B}} = (-i)^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, \Theta_{\mathrm{B}\,l}^{(m)}(\boldsymbol{k},\tau_0) \tag{10.226}$$

が得られる．

スピン球面調和関数で展開した係数は，座標変換に対して変換式 (6.320) にしたがう．したがって，展開式 (9.240) の係数には，

$$\Theta_{\mathrm{Q}\,l}^{\pm(m)}(\boldsymbol{k},\tau) = \sum_M D_{mM}^l(\hat{\boldsymbol{k}})\, \tilde{\Theta}_{\mathrm{Q}\,l}^{\pm(M)}(\boldsymbol{k},\tau) \tag{10.227}$$

という関係がある．ただし，$\tilde{\Theta}_{\mathrm{Q}\,l}^{\pm(M)}(\boldsymbol{k},\tau)$ は 9.5.2 項で導入した $\boldsymbol{k} \parallel \hat{\boldsymbol{z}}$ となる座標系での展開係数であり，$D_{mM}^l(\hat{\boldsymbol{k}})$ は z 軸を $\hat{\boldsymbol{k}}$ の方向へ回転させる回転行列である．式 (9.242) により，上の変換式は

$$\Theta_{\mathrm{E}\,l}^{(m)}(\boldsymbol{k},\tau) = \sum_M D^l_{mM}(\hat{\boldsymbol{k}})\,\tilde{\Theta}_{\mathrm{E}\,l}^{(M)}(\boldsymbol{k},\tau), \quad \Theta_{\mathrm{B}\,l}^{(m)}(\boldsymbol{k},\tau) = \sum_M D^l_{mM}(\hat{\boldsymbol{k}})\,\tilde{\Theta}_{\mathrm{B}\,l}^{(M)}(\boldsymbol{k},\tau) \quad (10.228)$$

とも表すことができる．偏光に対する放射遷移関数を $g_{\alpha\,l}^{\mathrm{E}(M)}(k,\tau)$, $g_{\alpha\,l}^{\mathrm{B}(M)}(k,\tau)$ とすると，

$$\tilde{\Theta}_{\mathrm{E}\,l}^{(M)}(\boldsymbol{k},\tau) = (2l+1)\sum_\alpha g_{\alpha\,l}^{\mathrm{E}(M)}(k,\tau)\,X_\alpha^{(M)}(\boldsymbol{k}) \quad (10.229)$$

$$\tilde{\Theta}_{\mathrm{B}\,l}^{(M)}(\boldsymbol{k},\tau) = (2l+1)\sum_\alpha g_{\alpha\,l}^{\mathrm{B}(M)}(k,\tau)\,X_\alpha^{(M)}(\boldsymbol{k}) \quad (10.230)$$

と書ける．式 (10.225), (10.226), (10.228)–(10.230) は，温度ゆらぎにおける式 (10.150), (10.151), (10.153) に対応する．すると，温度ゆらぎにおける式 (10.159), (10.160) の導出と同様にして，

$$\left\langle a_{lm}^{X\,*} a_{l'm'}^{Y} \right\rangle = C_l^{XY}\delta_{ll'}\delta_{mm'} \quad (10.231)$$

が得られる．ただし X, Y には T, E, B のいずれかを代入するものとし，温度ゆらぎの展開係数については $a_{lm} = a_{lm}^{\mathrm{T}}$ と表記する．ここで温度ゆらぎと偏光の自己相関や交差相関で作られる各種の角度パワースペクトルは，まとめて

$$C_l^{XY} = 4\pi\int\frac{k^2dk}{2\pi^2}\sum_{\alpha,\beta}\sum_M g_{\alpha\,l}^{X(M)}(k,\tau_0)g_{\beta\,l}^{Y(M)}(k,\tau_0)P_{\alpha\beta}(k) \quad (10.232)$$

で与えられる．式 (10.231) により，統計平均としては m の値によらず

$$C_l^{XY} = \left\langle a_{lm}^{X\,*} a_{lm}^{Y} \right\rangle \quad (10.233)$$

が成り立つ．

このように，温度ゆらぎと偏光に対する放射遷移関数 $g_{\alpha l}^{\mathrm{T}(M)}(k,\tau_0)$, $g_{\alpha l}^{\mathrm{E}(M)}(k,\tau_0)$, $g_{\alpha\,l}^{\mathrm{B}(M)}(k,\tau_0)$ を求めておけば，初期ゆらぎのパワースペクトル $P_{\alpha\beta}(k)$ を上の式へ代入することで，観測量である各種の角度パワースペクトル C_l^{XY} が求められる．ただし，パリティ変換の性質を表す式 (10.221) により，式 (10.233) は $C_l^{\mathrm{TB}} \to -C_l^{\mathrm{TB}}$, $C_l^{\mathrm{EB}} \to -C_l^{\mathrm{EB}}$ と変換する．このことから，宇宙がパリティ変換に対する不変性を持てば，

$$C_l^{\mathrm{TB}} = C_l^{\mathrm{EB}} = 0 \quad (10.234)$$

となる．パリティ不変性は現実の宇宙でもよい精度で成り立っていると考えられる．他の組み合わせの角度パワースペクトル C_l^{TT}, C_l^{TE}, C_l^{EE}, C_l^{BB} は，パリティ変

換について符号が反転しないので，パリティ不変性を持つ宇宙においてもゼロでない値をとることができる．

次に，偏光に対する視線積分表示を求めることを考える．式 (9.264) を変形すれば，

$$\Theta_{\mathrm{Q}}^{\pm\prime}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{k},\tau) + ik\mu\Theta_{\mathrm{Q}}^{\pm}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{k},\tau) - \kappa'\Theta_{\mathrm{Q}}^{\pm}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{k},\tau) = -\sum_{M}\sqrt{\frac{4\pi}{5}}\ {}_{\pm2}Y_2^M(\boldsymbol{n})S_{\mathrm{Q2}}^{(M)}(\boldsymbol{k},\tau) \tag{10.235}$$

となる．ただし $\mu = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}/k$ であり，また

$$S_{\mathrm{Q2}}^{(M)}(\boldsymbol{k},\tau) = \frac{\sqrt{3}\,\kappa'}{10}\left(\tilde{\Theta}_{\mathrm{I2}}^{(M)} - \sqrt{6}\tilde{\Theta}_{\mathrm{E2}}^{(M)}\right) \tag{10.236}$$

と定義した．

式 (10.166) の形式解が式 (10.167) であることより，式 (10.235) の視線積分表示は

$$\Theta_{\mathrm{Q}}^{\pm}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{k},\tau_0) = -\sum_{M}\sqrt{\frac{4\pi}{5}}\ {}_{\pm2}Y_2^M(\boldsymbol{n})\int_0^{\tau_0} d\tau\, e^{ik\mu(\tau-\tau_0)-\kappa}S_{\mathrm{Q2}}^{(M)}(\boldsymbol{k},\tau) \tag{10.237}$$

で与えられる．ここで $x = k(\tau_0 - \tau)$ とおいてレイリー展開の公式 (B.54) および還元公式 (6.322) を適用すると，

$$\begin{aligned}{}_{\pm2}Y_2^M(\boldsymbol{n})e^{-ix\mu} = &\sum_{l,l'}\sqrt{\frac{5}{2l+1}}\,(2l'+1)(-i)^{l'}j_{l'}(x)\\ &\times\langle l',0;2,-M|\,l,-M\rangle\langle l',0;2,\pm2|\,l,\pm2\rangle\ {}_{\pm2}Y_l^M(\boldsymbol{n})\end{aligned} \tag{10.238}$$

が得られる．ここで l, l' についての和は $(2,l,l')$ が 3 角不等式を満たすようなすべての負でない整数についてとる．上式を書き換えて，

$${}_{\pm2}Y_2^M(\boldsymbol{n})e^{-ix\mu} = \sum_{l=2}^{\infty}(-i)^{l-L}\sqrt{5(2l+1)}\left[\epsilon_l^{(M)}(x) \pm i\beta_l^{(M)}(x)\right]{}_{\pm2}Y_l^M(\boldsymbol{n}) \tag{10.239}$$

という形にできる．ただし，

$$\begin{aligned}\epsilon_l^{(M)}(x) \pm i\beta_l^{(M)}(x) \equiv &\sum_{l'=l-2}^{l+2}(-i)^{l'-l+2}\,\frac{2l'+1}{2l+1}\\ &\times\langle l',0;2,-M|\,l,-M\rangle\langle l',0;2,\pm2|\,l,\pm2\rangle\, j_{l'}(x)\end{aligned} \tag{10.240}$$

と定義した．これらの量 $\epsilon_l^{(M)}(x)$, $\beta_l^{(M)}(x)$ が必要となるのは $M = 0, \pm1, \pm2$ の場合だけである．必要なクレブシュ-ゴルダン係数の具体的な表式 (B.104) を求めて式 (10.240) へ代入し，さらにその結果を球ベッセル関数の再帰関係式 (10.174), (10.175) によって変形する．その結果，

$$\epsilon_l^{(0)}(x) = \sqrt{\frac{3}{8}}\sqrt{(l-1)l(l+1)(l+2)}\,\frac{j_l(x)}{x^2} \tag{10.241}$$

$$\epsilon_l^{(\pm1)}(x) = \frac{1}{2}\sqrt{(l-1)(l+2)}\left[\frac{j_l(x)}{x^2} + \frac{j_l'(x)}{x}\right] \tag{10.242}$$

$$\epsilon_l^{(\pm2)}(x) = \frac{1}{4}\left[-j_l(x) + j_l''(x) + \frac{2j_l(x)}{x^2} + \frac{4j_l'(x)}{x}\right] \tag{10.243}$$

$$\beta_l^{(0)}(x) = 0, \qquad \beta_l^{(\pm1)} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{(l-1)(l+2)}\,\frac{j_l(x)}{x} \tag{10.244}$$

$$\beta_l^{(\pm2)}(x) = \pm\frac{1}{2}\left[j_l'(x) + \frac{2j_l(x)}{x}\right] \tag{10.245}$$

が得られる．

式 (10.239) を式 (10.237) へ代入することにより，

$$\begin{aligned}\Theta_{\mathrm{Q}}^{\pm}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{k},\tau_0) = &\sum_{l=2}^{\infty}(-i)^l\sqrt{4\pi(2l+1)}\sum_M {}_{\pm2}Y_l^M(\boldsymbol{n})\\ &\times\int_0^{\tau_0}d\tau\left\{\epsilon_l^{(M)}[k(\tau_0-\tau)] \pm i\beta_l^{(M)}[k(\tau_0-\tau)]\right\}e^{-\kappa}S_{\mathrm{Q}2}^{(M)}(\boldsymbol{k},\tau)\end{aligned} \tag{10.246}$$

となる．これを式 (9.240) と比較することにより，スピン球面調和関数展開の係数 $\tilde{\Theta}_{\mathrm{Q}l}^{\pm(M)}(\boldsymbol{k},\tau_0)$ が求められ，さらに式 (9.242) を用いれば，

$$\tilde{\Theta}_{\mathrm{E}l}^{(M)}(\boldsymbol{k},\tau_0) = (2l+1)\int_0^{\tau_0}d\tau\,\epsilon_l^{(M)}[k(\tau_0-\tau)]\,e^{-\kappa}S_{\mathrm{Q}2}^{(M)}(\boldsymbol{k},\tau) \tag{10.247}$$

$$\tilde{\Theta}_{\mathrm{B}l}^{(M)}(\boldsymbol{k},\tau_0) = (2l+1)\int_0^{\tau_0}d\tau\,\beta_l^{(M)}[k(\tau_0-\tau)]\,e^{-\kappa}S_{\mathrm{Q}2}^{(M)}(\boldsymbol{k},\tau) \tag{10.248}$$

を得る．

源泉関数 $S_{\mathrm{Q}2}^{(M)}$ は式 (10.236) のように線形摂動量であるから，初期ゆらぎ $X_\alpha^{(M)}(\boldsymbol{k})$ の線形結合で与えられ，

$$S_{\mathrm{Q}2}^{(M)}(\boldsymbol{k},\tau) = \sum_\alpha \hat{S}_\alpha^{\mathrm{Q}(M)}(k,\tau)X_\alpha^{(M)}(\boldsymbol{k}) \tag{10.249}$$

と表すことができる．比例係数 $\hat{S}_\alpha^{\mathrm{Q}(M)}(k,\tau)$ は源泉関数 $S_{\mathrm{Q}2}^{(M)}(\boldsymbol{k},\tau)$ の遷移関数である．式 (10.249) を式 (10.247), (10.248) へ代入し，偏光に対する放射遷移関数 $g_{\alpha l}^{\mathrm{E}(M)}$, $g_{\alpha l}^{\mathrm{B}(M)}$ の定義式 (10.229), (10.230) と比較すれば，

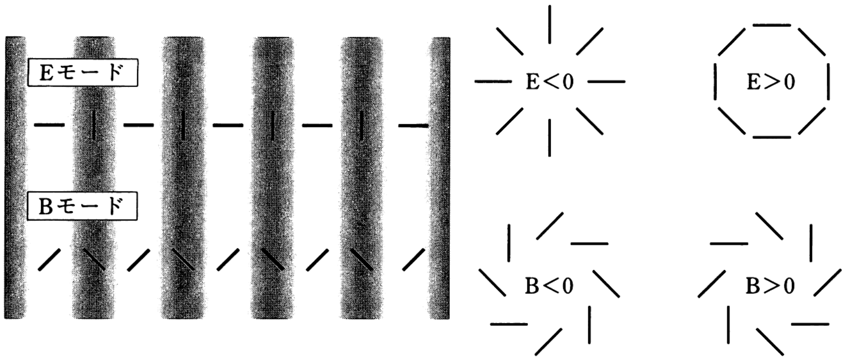


図 10.4 Eモードと B モードの関係．左図はゆらぎが一定の方向を向いている場合．右図は円対称なゆらぎがある場合．

$$g_{\alpha l}^{\mathrm{E}(M)}(k,\tau_0) = \int_0^{\tau_0} d\tau\, \epsilon_l^{(M)}\,[k(\tau_0-\tau)]\, e^{-\kappa} \hat{S}_\alpha^{\mathrm{Q}(M)}(k,\tau) \tag{10.250}$$

$$g_{\alpha l}^{\mathrm{B}(M)}(k,\tau_0) = \int_0^{\tau_0} d\tau\, \beta_l^{(M)}\,[k(\tau_0-\tau)]\, e^{-\kappa} \hat{S}_\alpha^{\mathrm{Q}(M)}(k,\tau) \tag{10.251}$$

となることがわかる．これを式 (10.232) に代入すれば，初期ゆらぎパワースペクトルの積分として各種の角度パワースペクトル C_l^{XY} が得られる．温度ゆらぎと同様に，偏光自由度についてもここに導いた視線積分法が有用である．

式 (10.244) からわかるように，スカラー型摂動成分 $M=0$ に対して $\beta_l^{(0)}=0$ である．すなわち，B モード偏光はスカラー型摂動成分には存在せず，ベクトル型とテンソル型の摂動成分だけに存在する．これは，B モード偏光がゆらぎの変化する方向に対して傾いた方向を向いている，という特徴による．図 10.4 の左図のように，ゆらぎの波数ベクトルが横に向いていて，濃淡で表されるようなゆらぎがあるとき，E モードの偏光方向はゆらぎの変化する方向と垂直または平行になる．一方，B モードの偏光方向は E モードに比べて 45° 傾いている．右図は，円対称なゆらぎがある場合に，E モードと B モードの偏光パターンを表している．

数値計算により求めた，温度と偏光を含む各種パワースペクトルの理論予言の例を図 10.5 に示す．ただし，宇宙論パラメータの値は付録 A.4 の中心値を用い，初期条件としては標準的な断熱ゆらぎを仮定した．左図がスカラー型成分の寄与に対応し，右図がテンソル型成分の寄与に対応する．テンソル型成分の全振幅は理論的に任意であり，図ではテンソル・スカラー比の値が $r=1$ の場合を示した．テンソル型成分の全振幅はすべて r に比例する．観測的な上限は $r<0.1$ であるから，実

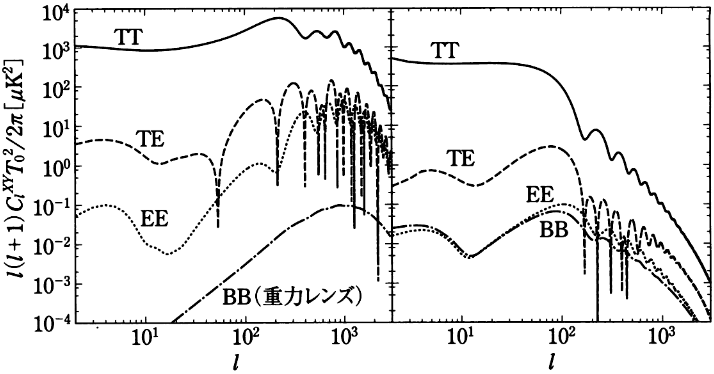


図 10.5 宇宙マイクロ波背景放射の温度と偏光を含む各種の角度パワースペクトル C_l^{XY} $(XY = \mathrm{TT, TE, EE, BB})$ に対する理論予言．左図がスカラー型摂動成分の寄与を表し，右図がテンソル型摂動成分の寄与を表す．テンソル型成分の振幅には $r = 1$ を用いた．スカラー型成分に対する B モードのスペクトル C_l^{BB} は重力レンズ効果による寄与であり，それ以外のスペクトルには重力レンズ効果を含めていない．計算には公開コード CAMB を用いた．

際のテンソル型成分における全振幅は，この図の 1/10 程度よりも小さい．

上の考察では最終散乱面において発生した偏光だけを考えている．光が伝播する経路上には密度ゆらぎがあり，これが重力レンズ効果を起こすことにより宇宙マイクロ波背景放射に影響を及ぼす．このとき，もはや最終散乱面での E モードと B モードの区別は保たれなくなり，スカラー型摂動成分についても B モードの偏光が含まれるようになる．詳細は省略するが，この効果は主に l の大きな小角度スケールにおいて見られる．参考のため，図 10.5 には，重力レンズ効果によるスカラー型成分の B モードスペクトル C_l^{BB} を示してある．ただし，それ以外のスペクトルには重力レンズ効果を含めていない．大角度側の l の小さなところには，スカラー型摂動成分は B モードにほとんど寄与しない．したがって，もし大角度側で偏光 B モードが観測されれば，それは初期のテンソル型摂動成分，すなわち初期重力波の寄与を見ていることになる．これにより，インフレーション理論などの初期ゆらぎ生成機構に大きな情報を与えることができる．

現在のところ，初期ゆらぎ起源の B モード偏光が見つかったという確実な証拠はないが，E モード偏光については観測されている．温度ゆらぎの場合と同様に，E モード偏光へのテンソル型摂動成分の寄与は無視できる．このため，観測された温度ゆらぎの角度パワースペクトルと一致する宇宙論パラメータを選ぶと，E モード偏光の角度パワースペクトルは，理論によってほぼ一意的に定まってしまう．こ

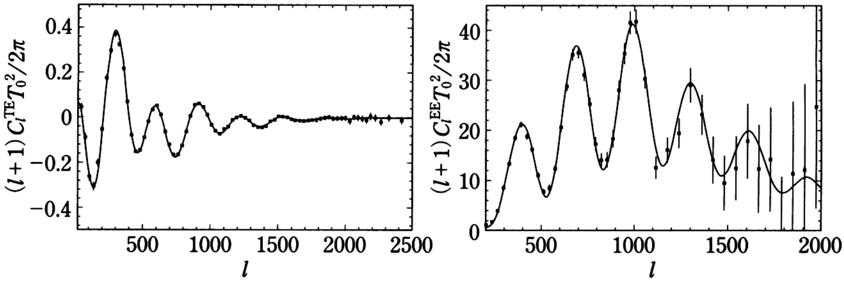


図 10.6 宇宙マイクロ波背景放射の観測衛星 Planck によって得られた，E モード偏光に関係する角度パワースペクトル．左図は温度ゆらぎと E モード偏光との交差スペクトル $C_l^{\rm TE}$ を表し，右図は E モード偏光の自己スペクトル $C_l^{\rm EE}$ を表す．誤差棒つきの記号が観測値で，実線は理論曲線．理論曲線の宇宙論パラメータは，温度ゆらぎの図 10.3 に用いられたものと同じ値が用いられている（Planck Collaboration, arXiv:1303.5076 より転載）．

のため，E モード偏光を含む角度パワースペクトル $C_l^{\rm TE}$, $C_l^{\rm EE}$ は宇宙論モデルに対する整合性を確かめるために有用である．

図 10.6 は，観測衛星 Planck によって得られた E モード偏光を含む角度パワースペクトル $C_l^{\rm TE}$, $C_l^{\rm EE}$ である．この図中の曲線は理論予言を表すが，このときに仮定した宇宙論パラメータの値は，図 10.3 において温度ゆらぎの角度パワースペクトルを再現した値と同じものである．自由に動かした理論パラメータは 6 つしかないにもかかわらず，広い角度スケールにわたって複数の角度パワースペクトルを理論が見事に説明している．このことは，我々の採用している宇宙論モデルが，高い精度で整合的であることを示している．

10.4 宇宙の大規模構造

宇宙マイクロ波背景放射のゆらぎは，主に晴れ上がり時における宇宙の状態を反映した観測量である．もっと現在時刻に近い宇宙を直接調べる方法として，天体の空間的な分布により，密度ゆらぎの状態を調べるというものがある．天体形成は複雑な過程であり，非線形成長の顕著な小スケールの天体分布からは，宇宙論的な情報を得ることが容易ではない．だが，線形理論の適用できる大スケールのゆらぎに着目すれば，そこにはまだ，初期ゆらぎの痕跡など宇宙論にとって有用な情報が色濃く残っている．大規模なスケールにおける天体の空間的分布を**宇宙の大規模構造** (large-scale structure of the universe) という．この節では，この観測量によって宇宙論モデルを制限する手法について述べる．

10.4.1 密度ゆらぎの相関関数とパワースペクトル

実空間の密度ゆらぎを $\delta(\boldsymbol{x},\tau)$ とする．このとき，空間の 2 点 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ における密度ゆらぎの値の積を作り，その統計平均によって

$$\xi\left(|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|, \tau\right) = \langle\delta(\boldsymbol{x}_1, \tau)\delta(\boldsymbol{x}_2, \tau)\rangle \tag{10.252}$$

を定義する．この量 $\xi(x,\tau)$ を **2 点相関関数** (2-point correlation function)，あるいは単に**相関関数** (correlation function) という．宇宙原理により，統計平均量は空間の特定の場所に依存しないから，上の式で定義される相関関数の空間依存性は 2 点の相対的な距離 $|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|$ だけを通じて入る．

ここで，密度場のフーリエ変換

$$\tilde{\delta}(\boldsymbol{k},\tau) = \int d^3x\, e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\delta(\boldsymbol{x},\tau) \tag{10.253}$$

を考える．ただし，曲率 K は無視できるとして平坦空間を仮定する．フーリエ係数 $\tilde{\delta}$ に対する 2 点の相関を考えると，式 (10.252) を用いて，

$$\left\langle\tilde{\delta}(\boldsymbol{k},\tau)\tilde{\delta}(\boldsymbol{k}',\tau)\right\rangle = \int d^3x_1\, d^3x_2\, e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}_1 - i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{x}_2}\xi\left(|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|, \tau\right) \tag{10.254}$$

$$= (2\pi)^3\delta_{\mathrm{D}}^3(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}')\int d^3x\, e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\xi\left(|\boldsymbol{x}|, \tau\right) \tag{10.255}$$

が得られる．ただし 2 番めの等式では，$\boldsymbol{x}_1 \to \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2$ と変数変換してから $\boldsymbol{x}_2$ について積分した．デルタ関数が現れるため，$\boldsymbol{k} = -\boldsymbol{k}'$ のときだけゼロでない値を持つ．デルタ関数が現れる理由は，相関関数が 2 点の差 $\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2$ にしか依存せず，宇宙空間が並進不変性を持っているためである．

式 (10.255) は

$$\left\langle\tilde{\delta}(\boldsymbol{k},\tau)\tilde{\delta}(\boldsymbol{k}',\tau)\right\rangle = (2\pi)^3\delta_{\mathrm{D}}^3(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}')P(k,\tau) \tag{10.256}$$

と表され，

$$P(k,\tau) = \int d^3x\, e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\xi\left(|\boldsymbol{x}|, \tau\right) \tag{10.257}$$

は物質のパワースペクトルである．式 (10.257) 右辺において，相関関数の空間依存性が方向に依存しない $|\boldsymbol{x}|$ だけの関数であることから，パワースペクトルも波数ベクトルの方向には依存しない．

式 (10.257) は，パワースペクトルが相関関数の 3 次元フーリエ変換であること

を示している．この式をフーリエ逆変換すれば，相関関数をパワースペクトルで表すこともできる．これらの変換式においては角度積分を実行することができ，

$$P(k,\tau) = \int d^3x\, e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}\xi(|\boldsymbol{x}|,\tau) = 4\pi\int x^2dx\,\frac{\sin kx}{kx}\xi(x,\tau) \tag{10.258}$$

$$\xi(x,\tau) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}P(|\boldsymbol{k}|,\tau) = \int \frac{k^2dk}{2\pi^2}\,\frac{\sin kx}{kx}P(k,\tau) \tag{10.259}$$

が得られる．

10.4.2 線形パワースペクトルと物質遷移関数

密度ゆらぎは超ハッブル・スケールでゲージ依存する摂動量であるから，相関関数やパワースペクトルも同じようにゲージ依存量である．現在時刻に近い宇宙の観測により得られる密度ゆらぎは，ハッブル半径よりも十分に長さスケールが小さく，そのゲージ依存性は問題にならない．だが，十分に遠方の宇宙や大きなスケールで見るゆらぎの波長には，ハッブル半径を超える領域が含まれ，ゲージ不変量を用いた記述も依然として有用である．

10.3.1 項において，複数の初期ゆらぎに対するスカラー型摂動成分を $X_\alpha^{(0)}(\boldsymbol{k})$ で表した．以下では密度ゆらぎに興味があるためにスカラー型成分だけを用い，この初期ゆらぎを $X_\alpha(\boldsymbol{k})$ と表記する．10.2 節における一般的な分類では，$X_\alpha = \zeta_{\mathrm{i}}, S_{\mathrm{c}}, S_{\mathrm{b}}, S_\nu, A_\nu$ となる．線形摂動論の解は初期ゆらぎの重ね合わせで与えられ，密度ゆらぎに対応するバーディーン変数 $\varDelta(\boldsymbol{k},\tau)$ は

$$\varDelta(\boldsymbol{k},\tau) = \sum_\alpha \hat{\varDelta}_\alpha(k,\tau)X_\alpha(\boldsymbol{k}) \tag{10.260}$$

と表すことができる．ここで $\hat{\varDelta}_\alpha(k,\tau)$ はそれぞれの初期ゆらぎ X_α に対応する遷移関数である．式 (10.154) で定義される初期ゆらぎの交差パワースペクトル $P_{\alpha\beta}^{(M)}(k)$ のスカラー型成分 $P_{\alpha\beta}(k) \equiv P_{\alpha\beta}^{(0)}(k)$ を用いると，変数 $\varDelta$ のパワースペクトルは

$$P(k,\tau) = \sum_{\alpha\beta} \hat{\varDelta}_\alpha(k,\tau)\hat{\varDelta}_\beta(k,\tau)P_{\alpha\beta}(k) \tag{10.261}$$

となる．

各種の初期ゆらぎに対して数値的に求めた遷移関数を用いれば，密度ゆらぎのパワースペクトルの形が数値的に求められる．これを図 10.7 に示した．ただし，この図では異なる種類の初期ゆらぎの間に相関がないものとし，$P_{\alpha\beta}(k) \propto \delta_{\alpha\beta}$ とした．また，宇宙論パラメータの値は，付録 A.4 の中心値を仮定した．断熱ゆらぎ

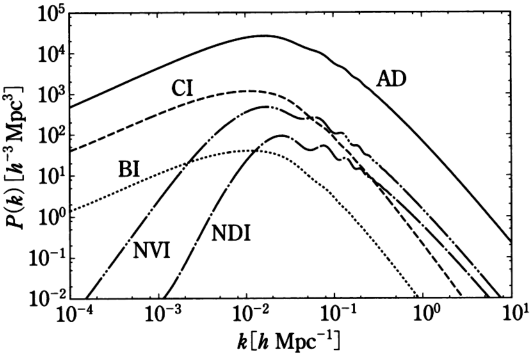


図 10.7 物質パワースペクトル $P(k)$ の関数形．異なる曲線はゆらぎの初期条件の違いに対応する．実線は断熱ゆらぎ (AD)，破線は CDM 等曲率モード (CI)，点線はバリオン等曲率モード (BI)，1 点鎖線はニュートリノ密度・等曲率モード (NDI)，2 点鎖線はニュートリノ速度・等曲率モード (NVI) にそれぞれ対応する．計算には公開コード CAMB を用いた．

の全振幅は観測に合うように選んであるが，それ以外の初期ゆらぎ成分については，全振幅の大きさに意味はない．物質のパワースペクトルは，初期ゆらぎの種類によって異なる形になることがわかる．CDM 等曲率モードとバリオン等曲率モードは，断熱ゆらぎの場合と似たようなスペクトルになるが，小スケール側では断熱ゆらぎよりも多少傾きの程度が大きい．一方，2 種類のニュートリノ等曲率モードは，断熱ゆらぎに比べて大スケール側のパワーが小さい．

前節で述べたように，ゆらぎの初期条件として断熱ゆらぎだけを考えれば，宇宙マイクロ波背景放射の観測を十分に説明できる．そこで以下では，断熱ゆらぎ以外の寄与は無視する．いま $\hat{\Delta}(k,\tau)$ を断熱ゆらぎに対する遷移関数とすると，式 (10.260), (10.261) は

$$\Delta(\boldsymbol{k},\tau) = \hat{\Delta}(k,\tau)\zeta_{\mathrm{i}}(\boldsymbol{k}), \qquad P(k,\tau) = \hat{\Delta}^2(k,\tau)P_{\zeta_{\mathrm{i}}}(k) \tag{10.262}$$

と表される．

密度ゆらぎに対応するゲージ不変変数 Δ は，ポアソン方程式に対応する一般的な式 (9.14) により，ゲージ不変変数 Ψ と関係している．断熱ゆらぎに対するゲージ不変変数 Ψ の遷移関数を $\hat{\Psi}(k,\tau)$ とすると，

$$\Psi(\boldsymbol{k},\tau) = \hat{\Psi}(k,\tau)\zeta_{\mathrm{i}}(\boldsymbol{k}) \tag{10.263}$$

と表される．ここで，超ハッブル・スケールの極限における値 $\hat{\Psi}(k\to 0,\tau)$ を用い

て規格化した遷移関数

$$T(k,\tau) \equiv \frac{\hat{\Psi}(k,\tau)}{\hat{\Psi}(k \to 0,\tau)} \tag{10.264}$$

を定義する．これを**物質遷移関数** (matter transfer function) という．この定義から明らかに，

$$T(k,\tau) \to 1 \qquad (k \to 0) \tag{10.265}$$

という性質を満たす．

初期条件の与えられる時刻を $\tau_{\rm i}$ とすると，断熱ゆらぎの式 (10.85) により，

$$\hat{\Psi}(k,\tau_{\rm i}) = \frac{10+4R_\nu}{15+4R_\nu} \tag{10.266}$$

は波数 k に依存しない定数である．したがって $\hat{\Psi}(k,\tau_{\rm i}) = \hat{\Psi}(k \to 0,\tau_{\rm i})$ が成り立つから，式 (10.264) は

$$T(k,\tau) = \left[\lim_{k\to 0}\frac{\hat{\Psi}(k,\tau)}{\hat{\Psi}(k,\tau_{\rm i})}\right]^{-1}\frac{\hat{\Psi}(k,\tau)}{\hat{\Psi}(k,\tau_{\rm i})} \tag{10.267}$$

と表すことができる．ゲージ不変変数 Ψ は，ポアソン方程式に対応する式 (9.14) により密度ゆらぎ変数 Δ と結びついているから，対応する遷移関数には

$$k^2\hat{\Psi}(k,\tau) = 4\pi G a^2\bar{\rho}\hat{\Delta}(k,\tau) \tag{10.268}$$

という関係がある．ただし $k^2 \gg |K|$ の場合を考えて曲率 K は無視した．これを用いると，式 (10.267) は

$$T(k,\tau) = \left[\lim_{k\to 0}\frac{\hat{\Delta}(k,\tau)}{\hat{\Delta}(k,\tau_{\rm i})}\right]^{-1}\frac{\hat{\Delta}(k,\tau)}{\hat{\Delta}(k,\tau_{\rm i})} \tag{10.269}$$

と表される．

ここで，超ハッブル・スケールの極限 $k \to 0$ における，密度ゆらぎの時間変化を表す成長因子を

$$D(\tau) \equiv \lim_{k\to 0}\frac{\hat{\Delta}(k,\tau)}{\hat{\Delta}(k,\tau_0)} = \lim_{k\to 0}\frac{\Delta(\boldsymbol{k},\tau)}{\Delta(\boldsymbol{k},\tau_0)} \tag{10.270}$$

で定義する．この因子は，現在値が $D(\tau_0) = 1$ となるように規格化されている．物

質優勢期以後の変数 $\varDelta$ の成長は式 (9.63) で与えられるから，成長因子 $D(\tau)$ は式 (9.60) で定義される線形成長因子 $D_+(\tau)$ に比例し，

$$D(\tau) = \frac{D_+(\tau)}{D_+(\tau_0)} \qquad \text{（物質優勢期以後）} \tag{10.271}$$

で与えられる．物質優勢期では，式 (9.61) により $D_+ = a$ であるから $D(\tau) = a(\tau)/D_+(\tau_0)$ となる．また放射優勢期では，$D(\tau) \propto a^2(\tau) \propto \tau^2$ と時間変化する．この線形成長因子 $D(\tau)$ を用いると，式 (10.269) から

$$\hat{\varDelta}(k,\tau) = \frac{D(\tau)}{D(\tau_{\rm i})} T(k,\tau) \hat{\varDelta}(k,\tau_{\rm i}) \tag{10.272}$$

が得られる．ここで，式 (10.266), (10.268) および放射優勢期に成り立つ式 (10.49), (10.50) を用いると，

$$\hat{\varDelta}(k,\tau_{\rm i}) = \frac{2}{3}\,\frac{10+4R_\nu}{15+4R_\nu}\,k^2{\tau_{\rm i}}^2 \tag{10.273}$$

が成り立つ．式 (10.262) へ式 (10.272), (10.273) を代入することにより，

$$P(k,\tau) = D^2(\tau) T^2(k,\tau)\, P_{\rm in}(k) \tag{10.274}$$

が得られる．ただし

$$P_{\rm in}(k) = \left(\frac{\hat{\varDelta}(k,\tau_{\rm i})}{D(\tau_{\rm i})}\right)^2 P_{\zeta{\rm i}}(k) = \left[\frac{1}{D(\tau_{\rm i})}\right]^2 P(k,\tau_{\rm i}) \tag{10.275}$$

$$= \frac{4}{9}\left(\frac{10+4R_\nu}{15+4R_\nu}\right)^2 \frac{k^4{\tau_{\rm i}}^4}{D^2(\tau_{\rm i})} P_{\zeta{\rm i}}(k) \tag{10.276}$$

は，超ハッブルスケールにおける初期密度ゆらぎのパワースペクトル $P(k,\tau_i)$ の形を保ちながら，そのまま振幅だけを線形成長因子で現在値まで増幅させた量である．初期時刻 $\tau_{\rm i}$ が設定されるのは放射優勢期の超ハッブル・スケールであるから，$\varDelta(\boldsymbol{k},\tau_{\rm i}) \propto D(\tau_{\rm i}) \propto {\tau_{\rm i}}^2$ が成り立ち，表式 (10.275), (10.276) は初期時刻 $\tau_{\rm i}$ の具体的な値には依存しない．

初期ゆらぎのパワースペクトルの関数形を，

$$P_{\zeta{\rm i}}(k) = A_\zeta\, k^{n_{\rm s}-4} \tag{10.277}$$

という形で表す．初期ゆらぎのスペクトル指数 $n_{\rm s}$ は一般に k に依存する関数 $n_{\rm s}(k)$ であってもよく，その場合にはこの式によって任意の形の初期パワースペクトルを表すことができる．式 (10.277) は，スローロール・インフレーションに基づいて導いた式 (8.126), (8.128) によるものと同じ形をしている．ただし，ここではゆ

らぎの生成機構のモデルを仮定することなく，式 (10.277) により初期ゆらぎのパワースペクトルをパラメータ化するものと考える．ここで

$$A = \frac{4}{9}\left(\frac{10+4R_\nu}{15+4R_\nu}\right)^2 \frac{{\tau_\mathrm{i}}^4}{D^2(\tau_\mathrm{i})} A_\zeta \tag{10.278}$$

とおけば，式 (10.276), (10.277) により，

$$P_\mathrm{in}(k) = A\,k^{n_\mathrm{s}} \tag{10.279}$$

となる．このとき式 (10.274) は

$$P(k,\tau) = Ak^{n_\mathrm{s}} T^2(k,\tau) D^2(\tau) \tag{10.280}$$

と表される．

上に導かれたパワースペクトルは線形理論の近似に基づいているため，とくに**線形パワースペクトル** (linear power spectrum) と呼ばれる．非線形性の強い小スケールでは，非線形効果により，実際のパワースペクトルは線形パワースペクトルから変形される．密度ゆらぎが $\Delta \sim 1$ よりも大きくなると，非線形効果が強く効いてくる．おおまかな基準として，無次元化パワースペクトル $\mathscr{P}(k) \equiv k^3 P(k)/2\pi^2$ が 1 を超えるスケールでは線形理論が成り立たない．

10.4.3 物質遷移関数の近似形

物質優勢期以降における物質遷移関数の形を近似的に求めてみる．物質優勢期以降は非等方応力がよい近似で無視できるので，式 (9.15) により $\Psi = -\Phi$ となり，これと式 (9.62) により

$$\Psi(\boldsymbol{k},\tau) = -\frac{D_+(\tau)}{a(\tau)} \Phi_\mathrm{m}(\boldsymbol{k}) \tag{10.281}$$

が成り立つ．ただし $\Phi_\mathrm{m}(\boldsymbol{k})$ は物質優勢期における時間的に一定のゲージ不変ポテンシャルである．ここで

$$\Phi_\mathrm{m}(\boldsymbol{k}) = \hat{\Phi}_\mathrm{m}(k)\,\zeta_\mathrm{i}(\boldsymbol{k}) \tag{10.282}$$

となる遷移関数 $\hat{\Phi}_\mathrm{m}(k)$ を用いると，物質優勢期以降の物質遷移関数は

$$T(k,\tau) = \frac{\hat{\Phi}_\mathrm{m}(k)}{\hat{\Phi}_\mathrm{m}(k \to 0)} \tag{10.283}$$

で与えられる．

放射優勢期から物質優勢期にかけて，非等方応力を無視する 2 成分近似を用いると，式 (9.110), (9.114) により超ハッブル・スケールにおいて

$$\Phi_{\mathrm{m}} \simeq \frac{9}{10}\Phi_{\mathrm{i}} \simeq -\frac{3}{5}\zeta_{\mathrm{i}} \qquad (k \to 0) \tag{10.284}$$

となるので，$\hat{\Phi}_{\mathrm{m}}(k \to 0) = -3/5$ である．したがって，式 (10.283) は

$$T(k,\tau) \simeq -\frac{5}{3}\hat{\Phi}_{\mathrm{m}}(k) \tag{10.285}$$

と表される．このように，物質優勢期以降の物質遷移関数 $T(k,\tau)$ は近似的に時間依存しない．ただし，上の近似的考察では流体近似を用いているため，ニュートリノの自由流運動によるゆらぎの減衰効果は含まれていない．ニュートリノの質量が十分に重い場合，この効果によって小スケール側からゆらぎの振幅が徐々に削られていくので，物質優勢期以後にも物質遷移関数の時間依存性が残る．だが，ニュートリノの質量が十分に軽ければ，こうした効果は無視できる．

物質遷移関数の小スケールにおける漸近的な振る舞いを解析的に導いてみる．近似的にバリオン成分を無視して，物質成分はコールド・ダークマターだけであるとする．等密度時 τ_{eq} における膨張率の値を $\mathscr{H}_{\mathrm{eq}} = \mathscr{H}(\tau_{\mathrm{eq}})$ とすると，このときのハッブル半径に対応する波数は $k_{\mathrm{eq}} \equiv \mathscr{H}_{\mathrm{eq}}$ である．この波数 k_{eq} に対応するスケールよりも小スケール側 $k > k_{\mathrm{eq}}$ のゆらぎは，放射優勢期にハッブル半径に入ってから，その後に物質優勢期を迎える．以下ではそのような波数 k を持つゆらぎを考える．

放射優勢期の膨張率は $\mathscr{H} = 1/\tau$ であるから，波数 k の波長スケール k^{-1} がハッブル半径 $\mathscr{H}^{-1}$ 程度となる条件は $k\tau = 1$ である．したがって，ある波数 k ($> k_{\mathrm{eq}}$) に対応する波長がハッブル半径の中に入る時刻は $\tau_k = 1/k$ で与えられる．式 (9.32), (9.33) からわかるように，ゲージ不変ポテンシャル Φ の値は，ハッブル半径の外にいる間は時間的に一定に保たれ，ハッブル半径の中へ入った後は，振幅が $(k\tau)^{-2}$ に比例して振動しながら急速に減衰する．十分にポテンシャルが減衰した極限を考え，コールド・ダークマターのゆらぎに対する発展方程式 (9.141), (9.142) からポテンシャルの寄与を無視して $v_{\mathrm{c}}^{(\mathrm{GI})}$ を消去すると，

$$\delta_{\mathrm{c}}^{(\mathrm{GI})\prime\prime} + \frac{1}{\tau}\delta_{\mathrm{c}}^{(\mathrm{GI})\prime} = 0 \tag{10.286}$$

が得られる．

一方，ハッブル半径の中へ入る前には，断熱ゆらぎに対する初期条件の式 (10.85)–(10.87) と発展方程式 (9.141) により，$\delta_{\mathrm{c}}^{(\mathrm{GI})} \simeq \zeta_{\mathrm{i}}$, $\delta_{\mathrm{c}}^{(\mathrm{GI})\prime} \simeq k^2 v_{\mathrm{c}}^{(\mathrm{GI})} \simeq k^2\tau\zeta_{\mathrm{i}}/3$

が成り立つ．ただしニュートリノの寄与を表す R_ν は近似的に無視した．ハッブル半径に入る時刻 $\tau_k = 1/k$ においてこれらのとる値 $\delta_{\rm c}^{\rm (GI)}(\tau_k) \simeq \zeta_{\rm i}$, $\delta_{\rm c}^{\rm (GI)\prime}(\tau_k) \simeq k\zeta_{\rm i}/3$ を初期条件として，式 (10.286) を近似的に解けば，$\delta_{\rm c}^{\rm (GI)} \simeq \zeta_{\rm i}[1 + \ln(k\tau)/3]$ が得られる．この振る舞いにより，等密度時には $\delta_{\rm c}^{\rm (GI)}(\tau_{\rm eq}) \sim \zeta_{\rm i}\ln(k\tau_{\rm eq})$ となる．ただし $k\tau_{\rm eq}$ が 1 より十分に大きい小スケール極限を考え，また数値因子は無視した．物質優勢期になるとコールド・ダークマターが支配的になり，式 (9.43) により小スケール極限で $\delta_{\rm c}^{\rm (GI)}(\tau) \simeq -k^2\tau^2\Phi_{\rm m}/6$ となる．ただし $\Phi_{\rm m}$ は時間的に一定のゲージ不変ポテンシャルである．

以上のことから，数値因子を無視したおおまかな見積りとして，

$$\Phi_{\rm m} \sim -\frac{\delta_{\rm c}^{\rm (GI)}(\tau_{\rm eq})}{k^2{\tau_{\rm eq}}^2} \sim -\zeta_{\rm i}\left(\frac{k}{k_{\rm eq}}\right)^{-2}\ln\left(\frac{k}{k_{\rm eq}}\right) \tag{10.287}$$

が得られる．これと式 (10.282), (10.283) により，短波長極限における物質遷移関数の漸近形は

$$T(k,\tau) \sim \left(\frac{k}{k_{\rm eq}}\right)^{-2}\ln\left(\frac{k}{k_{\rm eq}}\right) \qquad (k \gg k_{\rm eq}) \tag{10.288}$$

という形になる．これとは逆の長波長極限 $k \ll k_{\rm eq}$ では，式 (10.265) のように $T(k,\tau) \simeq 1$ である．等密度時のハッブル半径に対応するスケール $k_{\rm eq} = \mathscr{H}_{\rm eq}$ を境にして，初期ゆらぎのスペクトルが右下がりに大きく曲げられる．したがって，等密度時の膨張率 $\mathscr{H}_{\rm eq} = a_{\rm eq}H_{\rm eq}$ は宇宙論にとって重要なスケールである．その具体的な値は式 (2.154) に与えられている．

式 (10.280) に上の漸近形を代入すると，パワースペクトルの波数依存性は

$$P(k) \propto \begin{cases} k^{n_{\rm s}} & (k \ll k_{\rm eq}) \\ k^{n_{\rm s}-4}\left[\ln\left(k/k_{\rm eq}\right)\right]^2 & (k \gg k_{\rm eq}) \end{cases} \tag{10.289}$$

となる．スペクトル指数が $n_{\rm s} = 1$ のハリソン-ゼルドビッチスペクトルに近い場合，線形パワースペクトル $P(k)$ は大スケール極限で $P(k) \propto k$ となり，小スケール極限では $P(k) \propto k^{-3}(\ln k)^2$ のように振る舞う．図 10.7 における断熱ゆらぎのパワースペクトルには，この振る舞いが明らかに現れている．

図 10.7 からわかるように，パワースペクトルの折れ曲がりの右側には，わずかな振動が見られる．これは，10.1.2 項で述べたバリオン音響振動の名残である．バリオン成分のみが音響振動の影響を受け，質量の多くを占めるダークマターは音

響振動をしない．このため，全体のパワースペクトルには滑らかな成分にわずかな振動成分が乗る形となる．ダークマター成分も重力でバリオン成分に引き寄せられるため，最終的にはダークマター成分にもバリオン音響振動成分が含まれるようになる．この振動の痕跡は決まったスケールを持つため，宇宙論的には距離を決める指標として重要視されている．とくに，宇宙の大規模構造にバリオン音響振動の痕跡を観測すると，角径距離や膨張率を赤方偏移ごとに測定することができる．たとえば，宇宙のダークエネルギー成分を調べるには宇宙膨張の時間変化を精密測定する必要があるが，大規模構造におけるバリオン音響振動の測定は，その目的において有効な手段となる．

10.4.4 密度ゆらぎの平均化

スペクトル指数 n_s の値が 1 に近く，さらにコールド・ダークマターが宇宙の質量の多くを担っている場合，無次元化したパワースペクトル $k^3P(k)$ の値は大スケールから小スケールへ向かうにつれて増えていく．このことは，小スケールに着目するほど密度ゆらぎが大きくなることを意味する．パワースペクトルはフーリエ空間の表現であり，波長による分解でスケールごとのゆらぎが表されている．実空間で見たゆらぎの大きさを定義するため，密度ゆらぎ $\delta(\boldsymbol{x},\tau)$ があるとき，任意の半径 R で平均化した密度ゆらぎの場を

$$\delta_R(\boldsymbol{x},\tau) = \int d^3x'\, W_R(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|)\,\delta(\boldsymbol{x}',\tau) \tag{10.290}$$

で定義する．ここで関数 $W_R(x)$ は平均化に用いた関数であり，これを**ウィンドウ関数** (window function) と呼ぶ．この関数 $W_R(x)$ は x が R 程度よりも十分大きいところで 0 に近づき，また空間積分が 1 になるように規格化されているものとする．すなわち，

$$W_R(x) \xrightarrow{x\gg R} 0, \qquad \int d^3x\, W_R(|\boldsymbol{x}|) = 1 \tag{10.291}$$

を満たすものとする．よく用いられるウィンドウ関数の例として，半径 R の一様球を用いるトップハット型ウィンドウ関数

$$W_R(x) = \frac{3}{4\pi R^3}\Theta(R-x) \tag{10.292}$$

や，ガウス関数を用いるガウス型ウィンドウ関数

$$W_R(x) = \frac{e^{-x^2/2R^2}}{(2\pi R^2)^{3/2}} \tag{10.293}$$

がある．ただし $\Theta(x)$ は式 (3.133) で定義される階段関数である．

式 (10.290) における積分中の変数を，式 (10.253) のフーリエ係数で表すと，

$$\delta_R(\boldsymbol{x},\tau) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} W(kR)\tilde{\delta}(\boldsymbol{k},\tau) \tag{10.294}$$

となる．ただし $W(kR)$ はウィンドウ関数の 3 次元フーリエ変換

$$W(kR) = \int d^3x\, e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} W_R(|\boldsymbol{x}|) \tag{10.295}$$

である．トップハット型とガウス型のウィンドウ関数については，それぞれ

$$W(kR) = \frac{3j_1(kR)}{kR} = \frac{3\sin kR - 3kR\cos kR}{(kR)^3} \qquad \text{（トップハット型）} \tag{10.296}$$

$$W(kR) = e^{-k^2R^2/2} \qquad \text{（ガウス型）} \tag{10.297}$$

となる．ただし $j_1(z)$ は 1 次の球ベッセル関数である．

1 つの空間点におけるゆらぎの分散を求めると，式 (10.257), (10.294) を用いて

$$\sigma_R{}^2(\tau) \equiv \left\langle \delta_R(\boldsymbol{x},\tau)^2 \right\rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} W^2(kR)P(k,\tau) \tag{10.298}$$

となる．統計量の空間的並進不変性により，この量は位置 $\boldsymbol{x}$ によらない．上式で定義される分散の平方根 σ_R は，長さスケール R で粗視化して見たときの，密度ゆらぎの大きさを表す指標として用いられる．現在時刻 τ_0 における密度ゆらぎの振幅は，半径 $R = 8\,h^{-1}\mathrm{Mpc}$ のトップハット型ウィンドウ関数で平均化したゆらぎがおおまかに 1 に近い値をとる．この場合の $\sigma_R(\tau_0)$ の値

$$\sigma_8 \equiv \sigma_R(\tau_0)|_{R=8\,h^{-1}\mathrm{Mpc}} \tag{10.299}$$

は，式 (10.279) で定義されるパワースペクトルの振幅 A に代わるパラメータとして用いられることが多い．このパラメータ σ_8 は $\sqrt{A}$ に比例するが，その比例定数はスペクトル指数 n_s の値や，遷移関数が依存している宇宙論パラメータの値ごとに異なる．

共動座標で定義される平均化の半径 R は，その中に平均的に含まれている質量 M との間に

$$M = \frac{4\pi\bar{\rho}_0}{3}R^3 = 1.162\times 10^{12}h^{-1}M_\odot\Omega_{\mathrm{m}0}\left(\frac{R}{h^{-1}\mathrm{Mpc}}\right)^3 \tag{10.300}$$

の関係がある．ただし $\bar{\rho}_0 = \bar{\rho}(\tau_0)$ は平均質量密度の現在値であり，また $M_\odot$ =

1.989×10^{30} kg は太陽質量である．典型的な渦巻き銀河の 1 つである天の川銀河の質量は，おおまかに $10^{12} M_\odot$ である．このことから，1 つの銀河を構成する質量は，ゆらぎの振幅が小さかった初期宇宙において，スケールがほぼ 1 h^{-1}Mpc の領域に分布していたことがわかる．このように，式 (10.300) によって平均化の半径を天体の質量と結びつけることができる．つまり，平均化のスケールを質量スケールによっても表すことができる．

天体の形成は非線形現象であるため，線形理論によってその正確な形成過程を調べることはできない．少なくとも質量スケール M で平均化したゆらぎの振幅が線形段階にある限り，その質量の天体が形成することはない．ある質量スケール M の天体が形成されるためには，それに対応する半径スケール R で平均化したゆらぎの平均的な振幅 σ_R が十分に大きくなっている必要がある．

10.4.5 天体数密度のバイアス

宇宙の質量密度が空間的にどう分布しているか，直接的に観測することは難しい．質量の大部分を担っているダークマターは，光と直接の相互作用をしないからである．そこで，銀河などの観測可能な天体を用いて，宇宙の密度分布を推定することになる．だが，天体の数密度と質量密度の関係は一般に自明ではない．

一般にある天体の種類 X を考え，その数密度場を $n_X(\boldsymbol{x}, \tau)$ とし，その平均値を $\bar{n}_X$ とする．この天体に対する数密度ゆらぎを

$$\delta_X(\boldsymbol{x}, \tau) = \frac{n_X(\boldsymbol{x}, \tau)}{\bar{n}_X} - 1 \tag{10.301}$$

で定義する．もし，天体数密度場 n_X と質量密度場 ρ が比例して $n_X \propto \rho$ が成り立つならば，密度比で定義されるゆらぎについては $\delta_X = \delta$ が成り立つ．ところが一般には，天体数密度と質量密度が比例するとは限らない．実際の天体形成過程は極度な非線形現象であり，また，質量密度だけでなくバリオン成分を含む物理的な過程にも依存する．こうした複雑な形成機構は，天体の形成に関わる空間的スケールの数密度ゆらぎに顕著な影響を及ぼす．質量スケール M の天体について，おおまかには式 (10.300) に対応する半径 R 程度の空間スケールにおいて，そこに存在する質量密度と天体数密度の関係は非常に複雑になる．天体の数密度は質量の密度を偏って抽出したものであるということから，この関係を天体の**バイアス** (bias) という．

ところが，天体形成が起きるスケールよりもずっと大きなスケールに着目すれば，天体形成に伴う複雑な性質は影響せず，バイアスの関係も単純化する．一般

に，天体数密度場の値は，1つの場所だけでなくあらゆる場所の線形密度ゆらぎに依存する．すなわち，天体数密度場 δ_X は線形密度ゆらぎ δ の汎関数として一般に

$$\delta_X = \mathscr{F}_X[\delta] \tag{10.302}$$

で与えられる．ここで，線形理論の成り立つ大スケールに着目し，右辺の線形ゆらぎ δ に関する高次項を無視する線形近似を採用すると，

$$\delta_X(\boldsymbol{x},\tau) = \int d^3x' b_X(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|,\tau)\,\delta(\boldsymbol{x},\tau) \tag{10.303}$$

となる．この関係を**線形バイアス** (linear bias) といい，汎関数展開の係数に対応する関数 $b(x,\tau)$ はバイアス関数という．バイアス関数は，線形密度ゆらぎの微小変化に対する天体数密度ゆらぎの線形応答係数を表している．空間の等方性により，バイアス関数は位置の差 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'$ の方向には依存しない．式 (10.303) は畳み込み積分の形をしているので，これをフーリエ変換すると，

$$\delta_X(\boldsymbol{k},\tau) = b_X(k,\tau)\,\delta(\boldsymbol{k},\tau) \tag{10.304}$$

という積で与えられる．ここで $b_X(k,\tau)$ はバイアス関数を3次元フーリエ変換した関数である．つまり，フーリエ空間での線形バイアスは，ゆらぎの振幅にかけられる比例因子で与えられ，この因子 $b_X(k,\tau)$ を**線形バイアス因子** (linear bias factor) という．

質量スケール M の天体に対して，その形成スケール R はおおまかに式 (10.300) で対応づけられる．ある場所で天体が形成されるとき，形成スケール R を大きく超える遠方の場所における密度ゆらぎの値は，その天体の形成には影響を及ぼさない．したがって，式 (10.303) のバイアス関数は $b_X(x,\tau) \to 0$ $(x \gg R)$ という性質を満たす．したがって，そのフーリエ変換は

$$b_X(k,\tau) = \int d^3x\, e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} b_X(|\boldsymbol{x}|,\tau) \overset{kR\ll 1}{\longrightarrow} \int d^3x\, b_X(|\boldsymbol{x}|,\tau) \equiv b_X(\tau) \tag{10.305}$$

となり，波数 k に依存しない値に近づく．すなわち，天体形成スケール R よりも十分に大きなスケール $k \ll R^{-1}$ において，バイアス因子はスケール依存しない定数になる．この漸近的な定数 b_X の具体的な値は天体形成の詳細に依存するため，パラメータとして扱うことが一般的である．この定数 b_X を**バイアス・パラメータ** (bias parameter) という．もし，考えている天体の形成過程が物理的にすべて理解されているならば，このパラメータ b_X を第一原理から求めることができるはずである．だが，現実の天体についてそうしたことは難しく，バイアス・パラメータは

観測に基づいて決めるべき不定パラメータとなる．

以上のように，天体形成のスケールを超えるような大スケールにおいては，バイアスの関係を単純な線形バイアスで表すことができる．式 (10.304), (10.305) の関係から，天体数密度のパワースペクトルは大スケールの線形領域で

$$P_X(k,\tau) = [b_X(\tau)]^2\,P(k,\tau) \tag{10.306}$$

によって与えられる．大スケール極限のバイアス関数は波数依存性を持たず，バイアス・パラメータという定数になるため，天体パワースペクトルと質量パワースペクトルの波数依存性は共通になる．この場合は天体パワースペクトルの振幅だけがバイアスに依存する．

10.4.6 宇宙論的赤方偏移と特異速度

天体の数密度分布を用いて宇宙の密度ゆらぎを調べようとする場合，多くの天体に対する 3 次元的な位置を測定する必要がある．天球面上における天体の位置は望遠鏡などで容易に測定できるが，遠方にある天体までの距離を直接測定することは難しい．近傍にある星などまでの距離は年周視差によって直接測定できるが，天の川銀河系の外にある系外銀河までの距離は大きすぎ，年周視差などによって半ば直接的に測定のできる範囲をはるかに上回る．

幸い，遠方の天体までの距離は宇宙膨張による赤方偏移によって推定できる．宇宙の大規模構造を調べるための天体としては，銀河を用いることが多い．1 つの決まった基準によってできるだけ多くの銀河を選び，それらについて系統的に赤方偏移を調べていくという観測が広く行われている．このようにして多数の天体の位置を 3 次元分布として調べる観測を**赤方偏移サーベイ** (redshift survey) といい，宇宙の密度ゆらぎを調べるための強力な手段となっている．

ところが，観測される天体の赤方偏移には，膨張の一様等方成分だけでなく，天体の運動によって生じるドップラー偏移なども含まれている．一様等方宇宙に張られた共動座標系に対して銀河が静止しているならば，天体までの共動距離と赤方偏移は式 (2.36) を通じて 1 対 1 に対応する．しかし現実に存在する個々の銀河は，一様等方時空に対して固有の運動をしている．これを**特異速度** (peculiar velocity) という．特異速度によるドップラー偏移は，銀河の放射スペクトルに影響する．天体の赤方偏移でしか距離を見積もる手段がない場合，純粋な宇宙膨張による宇宙論的赤方偏移と，特異速度によるドップラー偏移を区別することができない．このため，赤方偏移で見積もった距離は，実際の距離から特異速度の分だけずれたものと

なる．したがって，赤方偏移サーベイにより得られる天体の 3 次元分布は，実空間における分布とは同じでない．距離を赤方偏移によって見積ったとき，天体が分布する空間のことを**赤方偏移空間** (redshift space) という．

ある天体が，観測者に向かって放射する光の波長を λ_1 とする．この天体の特異速度について，観測者から天体へ向かう視線方向成分を $v_\parallel$ とする．天体の位置で共動座標に静止した慣性系における波長を λ'_1 とする．それは，相対論的なドップラー偏移の公式により，

$$\lambda'_1 = \frac{1 + v_\parallel}{\sqrt{1 - {v_\parallel}^2}}\lambda_1 \tag{10.307}$$

で与えられる．この光が天体から観測者に届くまでに，宇宙膨張による赤方偏移を受ける．観測者の位置で共動座標に静止した慣性系における波長を λ'_0 とする．この天体の宇宙論的赤方偏移を z とすれば，式 (2.32) により，

$$1 + z = \frac{\lambda'_0}{\lambda'_1} \tag{10.308}$$

が成り立つ．観測者も特異速度を持ち，その視線方向成分を $v_{0\parallel}$ とすると，実際に観測される波長は

$$\lambda_0 = \frac{1 - v_{0\parallel}}{\sqrt{1 - {v_{0\parallel}}^2}}\lambda'_0 \tag{10.309}$$

となる．式 (10.308) で与えられる赤方偏移は，特異速度の効果が含まれない，純粋な宇宙膨張だけからの寄与である．観測者が実際に観測する赤方偏移 $z_{\rm obs}$ は，

$$1 + z_{\rm obs} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \tag{10.310}$$

で与えられる．

天体の特異速度の大きさは，典型的に 300 km/s 程度であって十分に非相対論的である．光速 c が 1 となる自然単位系をとっているから，非相対論的な速度 v は $v \ll 1$ を満たす．そこで，上の関係式において $v_\parallel$, $v_{0\parallel}$ の 2 次以上の項を無視しても，十分によい近似となる．このとき，式 (10.307)–(10.310) により

$$1 + z_{\rm obs} = (1 + z)(1 + v_\parallel - v_{0\parallel}) \tag{10.311}$$

という関係が得られる．この式を変形すると

$$z_{\text{obs}} = z + \frac{v_{\parallel} - v_{0\parallel}}{a} \tag{10.312}$$

となる．ただし $a = (1+z)^{-1}$ は，天体が電磁波を放射した時刻におけるスケール因子の値である．

実際に観測される赤方偏移 z_{obs} を，一様等方宇宙において導かれた共動距離と赤方偏移の関係式 (2.36) の右辺に代入することにより，

$$s = \int_0^{z_{\text{obs}}} \frac{dz}{H} \tag{10.313}$$

という距離を定義する．これを赤方偏移空間の共動距離と呼ぶ．式 (10.312) を上式に代入し，また，上で行ったように速度 v に対する 2 次以上の高次項を無視すると，

$$s = x + \frac{v_{\parallel} - v_{0\parallel}}{\mathscr{H}} \tag{10.314}$$

が得られる．ただし x は式 (2.36) で与えられ，実空間における天体までの共動距離である．また式 (7.14) により $\mathscr{H} = aH$ である．天体が電磁波を放射した共形時刻は，その天体までの共動距離に等しいので，この $\mathscr{H}$ は $\tau = x$ における値である．一様等方宇宙モデルの宇宙論パラメータをすべて固定すれば，膨張率 $H(z)$ は赤方偏移の関数として具体的に与えられるため，式 (10.313) で定義される量 s は観測量になる．式 (10.314) の右辺第 1 項は，特異速度を考えない本来の共動距離であり，第 2 項が特異速度による効果である．天体の特異速度が観測者から遠ざかる向きであれば，観測される赤方偏移は増えて，本来の距離よりも遠くに見える．逆に天体が観測者に近づいていれば，本来の距離よりも近くに見える．赤方偏移の観測では式 (10.314) の右辺に現れる 2 つの項を分離して測定することはできない．これら 2 つの項を足し合わせた距離 s が観測量になる．

10.4.7 赤方偏移空間のパワースペクトルと相関関数

観測者からの視線方向は 3 次元空間中で一定ではない．だが，遠方宇宙の観測においては，遠方にある観測領域中において視線方向を近似的に一定とみなすことができる．この近似を**遠方観測者近似** (distant-observer approximation) という．視線方向を第 3 軸方向に選んで観測領域に直交座標を考える．実空間を赤方偏移空間に変換すると，視線方向の位置だけが式 (10.314) によって変換され，視線に垂直な方向の位置は変換を受けない．すなわち，赤方偏移空間の座標は

$$(s_1, s_2, s_3) = \left(x_1, x_2, x_3 + \frac{v_3(\boldsymbol{x}) - v_{0,3}}{\mathscr{H}}\right) \tag{10.315}$$

となる．ここで v_3 は線形速度場 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ の視線方向成分であり，$v_{0,3}$ は観測者の特異速度 $\boldsymbol{v}_0$ における視線方向成分である．また，上述のように $\mathscr{H}$ は共形時刻 $\tau = x_3$ における値である．煩わしさを避けるため，上式や以下では，時間依存性を変数から省略して表記することにする．

実空間から赤方偏移空間への変換において，天体の数は変化せず保存する．実空間と赤方偏移空間における天体の数密度をそれぞれ $n_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{x})$, $n_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{s})$ とすると，この変換における天体数の保存により，

$$n_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{x})d^3x = n_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{s})d^3s \tag{10.316}$$

が成り立つ．ここで，変換のヤコビアンは

$$\frac{\partial(\boldsymbol{s})}{\partial(\boldsymbol{x})} = \frac{\partial s_3}{\partial x_3} = 1 + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{v_3}{\mathscr{H}}\right) \tag{10.317}$$

で与えられるから，赤方偏移空間における天体数密度は

$$n_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{s}) = \left[1 + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{v_3}{\mathscr{H}}\right)\right]^{-1} n_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{x}) \tag{10.318}$$

となる．

実空間と赤方偏移空間のどちらでも，平均数密度 $\bar{n}(\tau)$ の値は共通である．そこで，それぞれの空間の天体数密度ゆらぎを

$$\delta_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{x}) = \frac{n_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{x})}{\bar{n}} - 1, \qquad \delta_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{s}) = \frac{n_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{s})}{\bar{n}} - 1 \tag{10.319}$$

とする．ゆらぎ量に関する線形近似を用いると，式 (10.318), (10.319) から

$$\delta_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{s}) = \delta_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{v_3}{\mathscr{H}}\right) \tag{10.320}$$

が得られる．

実空間の座標 $\boldsymbol{x}$ と赤方偏移空間の座標 $\boldsymbol{s}$ の差は，一様等方宇宙にはない摂動量である．いま $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{x} + \delta\boldsymbol{s}$ として $\delta\boldsymbol{s}$ を摂動量とするとき，テイラー展開の線形近似により $\delta_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{s}) = \delta_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{x}) + \delta\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{\nabla}\delta_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{x})$ となるが，右辺第 2 項は 2 次の摂動量であり，線形近似では結局 $\delta_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{s}) = \delta_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{x})$ が成り立つ．また，速度場 $\boldsymbol{v}$ の空間的な変化は $\mathscr{H}(\tau = x_3)$ の変化よりもずっと大きいので，式 (10.320) において $\partial\mathscr{H}/\partial x_3$ は近似的に無視できる．すると式 (10.320) は

$$\delta_s(\boldsymbol{x}) = \delta_r(\boldsymbol{x}) - \frac{1}{\mathscr{H}}\frac{\partial v_3}{\partial x_3} \tag{10.321}$$

となる．さらにこの式をフーリエ変換することにより，

$$\delta_s(\boldsymbol{k}) = \delta_r(\boldsymbol{k}) - \frac{ik_3}{\mathscr{H}}v_3(\boldsymbol{k}) \tag{10.322}$$

が得られる．ただし，フーリエ変換をする赤方偏移空間は視線方向に大きすぎず，その中では共形時刻を近似的に一定であるとみなせるものとした．

式 (10.322) の右辺に現れる速度場は天体の特異速度に対応する．線形理論の成り立つような大スケールにおいて，天体と質量の速度は同じであると考えられるので，この速度には質量の線形速度場を用いる．物質優勢期以降の線形速度場は，式 (9.63) により $V = \mathscr{H} f_+ \varDelta / k^2$ を満たす．ただし曲率半径は十分に大きいとし，いま興味あるスケールでは $k^2 \gg |K|$ とした．ハッブル半径の内側では，摂動量のゲージ不定性が無視できるので，$\delta = \varDelta, \boldsymbol{v} = i\boldsymbol{k}V$ とみなしてよい．ただし変数 V は速度場のスカラー成分に対応するので，式 (7.120) より実空間では $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\nabla} V$ と対応することを用いた．したがって，

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{k}) = i\boldsymbol{k}V(\boldsymbol{k}) = \mathscr{H} f \frac{i\boldsymbol{k}}{k^2}\delta(\boldsymbol{k}) \tag{10.323}$$

となる．ただし式 (9.64) で定義される f_+ を簡略化して f と表した．式 (10.271) の規格化された線形成長因子 $D(\tau)$ を用いると，

$$f(\tau) = \frac{d\ln D}{d\ln a} = \frac{1}{\mathscr{H} D(\tau)}\frac{dD}{d\tau} \tag{10.324}$$

と表すこともできる．式 (10.323) の視線方向成分を式 (10.322) へ代入すれば，

$$\delta_s(\boldsymbol{k}) = \delta_r(\boldsymbol{k}) + f\mu^2\delta(\boldsymbol{k}) \tag{10.325}$$

が得られる．ただし

$$\mu \equiv \frac{k_3}{k} \tag{10.326}$$

は，視線方向に関する波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ の方向余弦である．

線形近似が適用できる大スケールにおいては，線形バイアスの関係式 (10.304) が適用でき，また式 (10.305) によりバイアス因子は波数によらない定数であるとみなしてよい．いま考えている天体のバイアス因子を $b(\tau)$ とすれば，数密度のゆらぎが $\delta_r(\boldsymbol{k}) = b(\tau)\,\delta(\boldsymbol{k})$ と表せるので，式 (10.325) は

$$\delta_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{k}) = \left(b + f\mu^2\right)\delta(\boldsymbol{k}) \tag{10.327}$$

となる．赤方偏移空間のパワースペクトルは

$$\langle \delta_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{k})\delta_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{k}')\rangle = (2\pi)^3\delta_{\mathrm{D}}^3(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}')P_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{k}) \tag{10.328}$$

から求められる．ただし，この式にデルタ関数が現れるのは空間の一様性のためである．ここでは遠方観測者近似を用いているため，それが満たされている．一方で，赤方偏移空間は視線方向が特別な方向になっているため，空間の等方性は成り立たない．このため，パワースペクトルは波数ベクトルの大きさだけでなく方向にも依存する関数 $P_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{k})$ となる．

式 (10.327), (10.328) により赤方偏移空間のパワースペクトルを求めると，

$$P_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{k}) = \left(1 + \beta\mu^2\right)^2 P_{\mathrm{r}}(k) \tag{10.329}$$

が得られる．ただし

$$P_{\mathrm{r}}(k) = b^2 P(k) \tag{10.330}$$

は，式 (10.306) に対応する，実空間における天体数密度のパワースペクトルである．また

$$\beta(\tau) = \frac{f(\tau)}{b(\tau)} \tag{10.331}$$

は赤方偏移変形パラメータと呼ばれる量である．スケール依存するバイアス因子 $b(k,\tau)$ を考える場合には，この量は波数の大きさ k にも依存する．遠方観測者近似における赤方偏移空間のパワースペクトル $P_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{k})$ の角度依存性は，変数 μ を通じて入ってくる．実空間と赤方偏移空間のパワースペクトルを線形理論で結びつける式 (10.329) を，**カイザーの公式 (Kaiser's formula)** という．赤方偏移空間のパワースペクトルに対する μ 依存性に対して，式 (B.50) を用いてルジャンドル多項式 $P_l(\mu)$ で展開した形にすると，

$$P_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{k}) = \left[\left(1 + \frac{2}{3}\beta + \frac{1}{5}\beta^2\right)P_0(\mu) + \left(\frac{4}{3}\beta + \frac{4}{7}\beta^2\right)P_2(\mu) + \frac{8}{35}\beta^2 P_4(\mu)\right]P_{\mathrm{r}}(k) \tag{10.332}$$

が得られる．

式 (10.332) の方向依存性は直交関数であるルジャンドル多項式で与えられている．その直交性を用いると，$P_l(\mu)$ $(l = 0, 2, 4)$ に比例する各項を $P_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{k})$ の角度積分によって表すことができる．これらの各項をそれぞれ，赤方偏移空間パワースペク

トルの単極成分，4 重極成分，8 重極成分という．これら多重極成分の相対的な比は，変数 β によって一意的に定められる．したがって，赤方偏移空間パワースペクトルの方向依存性を観測することにより，この変数 β の値を制限することができる．

赤方偏移空間における 2 点相関関数は，

$$\xi_\mathrm{s}(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{s}') = \langle \delta_\mathrm{s}(\boldsymbol{s})\delta_\mathrm{s}(\boldsymbol{s}')\rangle \tag{10.333}$$

で定義される．この相関関数は等方的でないが，式 (10.252)-(10.259) における考察はほぼ同様に成り立ち，相関関数とパワースペクトルは 3 次元フーリエ変換の関係にある．その結果，式 (10.259) の第 1 式に対応して，

$$\xi_\mathrm{s}(\boldsymbol{s}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{s}} P_\mathrm{s}(\boldsymbol{k}) \tag{10.334}$$

が得られる．この式の値を線形近似で具体的に求めるには，ルジャンドル展開したカイザーの公式 (10.332) を用いる．そこに現れてくる角度積分は，レイリー展開公式 (B.54) とルジャンドル多項式の加法定理の式 (B.78)，球面調和関数の方位角積分の式 (B.77)，およびルジャンドル多項式の直交性 (B.51) を用いると実行できる．その結果，

$$\begin{aligned}\xi_\mathrm{s}(\boldsymbol{s}) = b^2 \Bigg[&\left(1+\frac{2}{3}\beta+\frac{1}{5}\beta^2\right)\xi_0(s)P_0(\mu_s) \\ &+\left(\frac{4}{3}\beta+\frac{4}{7}\beta^2\right)\xi_2(s)P_2(\mu_s)+\frac{8}{35}\beta^2\xi_4(s)P_4(\mu_s)\Bigg]\end{aligned} \tag{10.335}$$

が得られる．ただし，

$$\mu_s = \frac{s_3}{s} \tag{10.336}$$

とした．この変数 μ_s は，赤方偏移空間の間隔ベクトル $\boldsymbol{s}$ が視線方向に対して持つ方向余弦である．また，

$$\xi_l(s) \equiv (-i)^l \int \frac{k^2dk}{2\pi^2} j_l(ks)P(k) \tag{10.337}$$

という関数を定義した．ここで $j_0(x) = \sin x/x$ であるから，関数 $\xi_0(s)$ は，式 (10.259) に与えられる実空間の相関関数 $\xi(x)$ と同じものである．

相関関数も，方向依存性が直交関数であるルジャンドル多項式で表されている．その直交性を用いることにより，$\xi_0(s)$ に比例する単極成分，$\xi_2(s)$ に比例する 4 重極成分，$\xi_4(s)$ に比例する 8 重極成分を，相関関数 $\xi_\mathrm{s}(\boldsymbol{s})$ の角度積分で表すことが

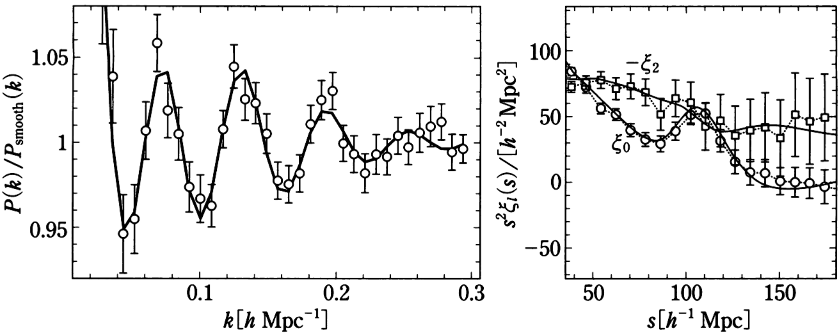


図 10.8 左図：大規模構造におけるパワースペクトル．右図：相関関数の測定結果．SDSS-III, BOSS プロジェクトによる（Anderson *et al.*, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **441**, 24(2014) より転載）．用いた銀河サンプルの平均赤方偏移は $z = 0.57$．左図のパワースペクトル $P(k)$ では滑らかな成分 $P_{\rm smooth}(k)$ が取り除かれてバリオン音響振動成分が強調されている．右図の相関関数については，単極成分 ξ_0 と 4 重極成分 ξ_2 を表している．理論曲線は，線形理論の予言に非線形性や観測固有の効果を補正してある．

できる．これらの多重極成分 $\xi_l(s)$ の関数形を観測することにより，宇宙論の情報を引き出すことができる．

銀河の赤方偏移サーベイによって得られる赤方偏移空間のパワースペクトルや相関関数は，宇宙論にとって非常に有用な観測量である．最近の観測例として，スローン・デジタル・スカイ・サーベイ (Sloan Digital Sky Survey; SDSS)*10という銀河赤方偏移サーベイによって得られた結果を図 10.8 に示す．左図はパワースペクトルからバリオン音響振動の部分を抽出したものである．観測されたパワースペクトル全体の形は，図 10.7 の実線に対応する断熱ゆらぎの初期条件のものと矛盾しない．パワースペクトルにおいて振動成分を含まない滑らかな成分を $P_{\rm smooth}(k)$ として，パワースペクトル全体 $P(k)$ をそれにより規格化した量 $P(k)/P_{\rm smooth}(k)$ が図に示されている．これにより，バリオン音響振動の特徴が顕著に見られる．右図は，赤方偏移空間における相関関数の単極成分 ξ_0 と 4 重極成分 ξ_2 の測定結果である．どちらの図にも理論曲線が与えられているが，これらは線形理論の予言に対して非線形性や観測固有の効果による補正を加えたものである．

バリオン音響振動の痕跡は，パワースペクトルで見ると複数の振動として現れるが，相関関数で見ると 1 つのピークとして現れる．このピークの位置は，式 (10.26), (10.28) に与えられる音響ホライズンが晴れ上がり時に持つ値 $r_{\rm s}(\tau_{\rm dec})$ に等

*10 `http://www.sdss3.org`

しい．パワースペクトルや相関関数におけるバリオン音響振動の痕跡は，統計的に半径が一定のスケールを与え，宇宙論的な標準定規の役割を果たす．すなわち，遠方宇宙にサイズの知られた天体があるのと実質的に同等である．このことは，宇宙の膨張率を精密に測定するために有用である．

このように，宇宙の大規模構造に対するパワースペクトルや相関関数などをくわしく解析すると，宇宙論モデルに制限を与えたり，宇宙論パラメータの値を決定したりすることができる．現在までの解析により，宇宙マイクロ波背景放射と宇宙の大規模構造の観測データは，同じ宇宙論モデルとパラメータの値によって，ほぼ整合的に説明できることが示されている．宇宙の大規模構造は，比較的現在に近い宇宙を調べるのに適している．また，宇宙マイクロ波背景放射のゆらぎでは拡散減衰で失われてしまう小スケール側の情報も，宇宙の大規模構造を用いれば調べることができる．このように，宇宙の大規模構造は宇宙マイクロ波背景放射とは相補的な観測量である．上で説明したようにダークエネルギーの研究に用いられたり，小スケール側のパワースペクトルに自由流運動の痕跡がないかを調べることでニュートリノ質量に制限を与えるなど，さまざまな応用が行われている．

宇宙のゆらぎ量を用いた観測によって宇宙論モデルを制限する方法には，本章で扱ったものの他にも多数の手法が開発されている．中でも，宇宙マイクロ波背景放射や遠方銀河からの光が観測者までやってくるときに，手前にある密度ゆらぎが重力レンズ効果を起こす現象を用いる手法がある．この重力レンズ効果を宇宙論的な解析に応用する手法は確立しており，すでに実際の解析に用いられている．また，赤方偏移が $z \gtrsim 10$ 程度の高赤方偏移宇宙には，銀河などの明るく光る天体がまだ形成されていないため，そのときの宇宙の状態を調べることが難しい．だが，まだ天体になっていない中性水素ガスによって放射・吸収される 21cm 超微細構造線を電波観測によって検出できれば，そのような領域も調べられる可能性がある．こうした新しい手法も，将来的には有力になると期待されている．

このように，さらに精密なレベルで宇宙論モデルを検証していくことは，宇宙論研究における今後の課題である．現代の宇宙論モデルには未解決の問題点がいくつかある．その中でも，ダークマターとダークエネルギーという未知のエネルギー成分の正体が明らかになっていないことや，初期ゆらぎの本当の起源が明らかになっていないことは，今後の研究で解決すべき大きな課題である．これらについては理論研究の重要性もさることながら，実験や観測的な研究も不可欠である．

ダークマターの正体，ダークエネルギーの正体，そして初期ゆらぎのくわしい生成機構などの未解決問題については，理論的な可能性が無数に考えられている．本

書では実験や観測によって確立した理論を中心に取り扱ったため，これら発展途上の理論についてはほとんど触れていない．こうした理論は，将来的な実験や観測によって検証され，選別されていく．その中から生き残る理論が出てくるかもしれないし，現在はまだ存在しない理論が現実の宇宙を説明するのかもしれない．宇宙論の研究は，いまも現在進行形で進んでいる．

付録 A
有用な数値

本書に関係する有用な数値をまとめる．以下の値は主として 2010 CODATA Internationally recommended values of the Fundamental Physical Constants*1，2012 Particle Data Group*2，Planck Cosmological Parameters (*Planck*+WP+highL +BAO)*3 などによる．括弧付きの数値は最後の数字に含まれる誤差 (1σ) を表す．たとえば，"1.234 (56)" は，"1.234 ± 0.056 (1σ)" という意味である．また，不等式に付けられている "(95% C.L.)" は，確度 95% で制限されることを表す．

A.1 数学定数

円周率	$\pi = 3.141592653589793238\ldots$
ネイピア数（自然対数の底）	$e = 2.718281828459045235\ldots$
オイラー定数	$\gamma = 0.577215664901532861\ldots$
アペリーの定数	$\zeta(3) = 1.202056903159594285\ldots$
10 の自然対数	$\ln 10 = 2.302585092994045684\ldots$

*1 http://physics.nist.gov/cuu/Constants/

*2 http://pdg.lbl.gov/

*3 http://www.sciops.esa.int/wikiSI/planckpla/index.php

A.2 物理定数

真空中の光速[*4]	$c \equiv 2.99792458 \times 10^{8}\ \mathrm{m\ s^{-1}}$
換算プランク定数（ディラック定数）[*5]	$\hbar = 1.054571726\,(47) \times 10^{-34}\ \mathrm{J\ s}$
	$= 6.58211928\,(15) \times 10^{-16}\ \mathrm{eV\ s}$
ボルツマン定数	$k_\mathrm{B} = 1.3806488\,(13) \times 10^{-23}\ \mathrm{J\ K^{-1}}$
アボガドロ数	$N_\mathrm{A} = 6.02214129\,(27) \times 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$
重力定数	$G = 6.67384(80) \times 10^{-11}\ \mathrm{m^3\ kg^{-1}\ s^{-2}}$
素電荷	$e = 1.602176565\,(35) \times 10^{-19}\ \mathrm{C}$
電子ボルト	$\mathrm{eV} = 1.602176565\,(35) \times 10^{-19}\ \mathrm{J}$
電子質量	$m_\mathrm{e} = 9.10938291\,(40) \times 10^{-31}\ \mathrm{kg}$
	$= 510.998928\,(11)\ \mathrm{keV}/c^2$
陽子質量	$m_\mathrm{p} = 1.672621777\,(74) \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
	$= 938.272046\,(21)\ \mathrm{MeV}/c^2$
中性子質量	$m_\mathrm{n} = 1.674927351\,(74) \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
	$= 939.565379\,(21)\ \mathrm{MeV}/c^2$
重陽子質量	$m_\mathrm{d} = 3.34358348\,(15) \times 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
	$= 1875.612859\,(41)\ \mathrm{MeV}/c^2$
ステファン-ボルツマン定数	$\sigma_\mathrm{SB} \equiv \pi^2 {k_\mathrm{B}}^4 / 60 \hbar^3 c^2$
	$= 5.670373\,(21) \times 10^{-8}\ \mathrm{W\ m^{-2}\ K^{-4}}$
真空の透磁率（誤差なし）	$\mu_0 \equiv 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{N\ A^{-2}}$
	$= 12.566370614... \times 10^{-7}\ \mathrm{N\ A^{-2}}$
真空の誘電率（誤差なし）	$\epsilon_0 \equiv 1/\mu_0 c^2$
	$= 8.854187817... \times 10^{-12}\ \mathrm{F\ m^{-1}}$

---

*4 基本単位のメートルは真空中の光速を用いて定義されるため，値に誤差はない．

*5 プランク定数 $h = 2\pi\hbar$ は無次元ハッブル定数と紛らわしいので本書では用いない．

微細構造定数	$\alpha \equiv e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$
	$= 7.2973525698\,(24) \times 10^{-3}$
	$= 1/137.035999074\,(44)$
トムソン散乱断面積	$\sigma_\mathrm{T} \equiv e^4/6\pi\epsilon_0{}^2 m_\mathrm{e}{}^2 c^4$
	$= 0.6652458734\,(13) \times 10^{-28}\ \mathrm{m}^2$
フェルミ結合定数	$G_\mathrm{F}/(\hbar c)^3 = 1.166364\,(5) \times 10^{-5}\ \mathrm{GeV}^{-2}$
弱混合角	$\sin^2\theta_\mathrm{W} = 0.23155\,(5)$
W 粒子質量	$m_\mathrm{W} = 80.385\,(15)\ \mathrm{GeV/c^2}$
Z 粒子質量	$m_\mathrm{Z} = 91.1876\,(21)\ \mathrm{GeV/c^2}$
プランク長	$l_\mathrm{Pl} \equiv (G\hbar/c^3)^{1/2}$
	$= 1.616199\,(97) \times 10^{-35}\ \mathrm{m}$
プランク質量	$m_\mathrm{Pl} \equiv (\hbar c/G)^{1/2}$
	$= 2.17651\,(13) \times 10^{-8}\ \mathrm{kg}$
	$= 1.220932\,(73) \times 10^{19}\ \mathrm{GeV}/c^2$
プランク時間	$t_\mathrm{Pl} \equiv (G\hbar/c^5)^{1/2}$
	$= 5.39106\,(32) \times 10^{-44}\ \mathrm{s}$
プランク温度	$T_\mathrm{Pl} \equiv (\hbar c^5/G)^{1/2}/k_\mathrm{B}$
	$= 1.416833\,(85) \times 10^{32}\ \mathrm{K}$

A.3 天文学的単位

天文単位*6 (astronomical unit)	$1\ \mathrm{AU} = 1.495978707 \times 10^{11}\ \mathrm{m}$
光年*6 (light year)	$1\ \mathrm{ly} = 9.4607304725808 \times 10^{15}\ \mathrm{m}$
	$= 0.306601\ldots\ \mathrm{pc}$
パーセク (parsec)	$1\ \mathrm{pc} = 1\ \mathrm{AU}/1\ \mathrm{arcsec}$
	$= 3.085677581\ldots \times 10^{16}\ \mathrm{m}$
	$= 3.2615638\ldots\ \mathrm{ly}$

*6 これが定義であり，値に誤差はない．

恒星年*7 (sidereal year, 2007)	$1\ \mathrm{yr} = 3.15581498 \times 10^{7}\ \mathrm{s}$
回帰年*8 (tropical year, 2007)	$1\ \mathrm{yr} = 3.15569252 \times 10^{7}\ \mathrm{s}$
太陽質量	$M_{\odot} = 1.32712440041\,(10) \times 10^{20} G^{-1}\ \mathrm{m}^{3}\ \mathrm{s}^{-2}$
	$= 1.98855(25) \times 10^{30}\ \mathrm{kg}$
太陽赤道半径	$R_{\odot} = 6.9551(3) \times 10^{8}\ \mathrm{m}$
太陽光度	$L_{\odot} = 3.8427(14) \times 10^{26}\ \mathrm{W}$
地球質量	$M_{\oplus} = 5.9722(6) \times 10^{24}\ \mathrm{kg}$
地球赤道半径	$R_{\oplus} = 6.378137 \times 10^{6}\ \mathrm{m}$

A.4 宇宙論的な量

ハッブル定数	$H_0 = 100\,h\ \mathrm{km\ s^{-1}\ Mpc^{-1}}$
	$= (3.085677581 \times 10^{17}\ \mathrm{s})^{-1}\ h$
	$= (9.778\ \mathrm{Gyr})^{-1}\ h$
無次元ハッブル定数*9	$h = 0.6780\,(77)$
宇宙年齢*9	$t_0 = 13.798\,(37)\ \mathrm{Gyr}$
臨界密度	$\varrho_{\mathrm{c}0} = \rho_{\mathrm{c}0}/c^2 = 3{H_0}^2/8\pi G$
	$= 2.77536627 \times 10^{11}\ h^2\ M_{\odot}\ \mathrm{Mpc}^{-3}$
	$= 1.87835\,(19) \times 10^{-26}\ h^2\ \mathrm{kg\ m^{-3}}$
	$= 1.05368\,(11) \times 10^{1}\ h^2\ \mathrm{GeV}/c^2\ \mathrm{m}^{-3}$
CMB 温度	$T_0 = 2.72548\,(57)\ \mathrm{K}$
相対論的有効自由度（エネルギー密度）	$g_{*0} \simeq 3.384$
相対論的有効自由度（エントロピー）	$g_{*S0} \simeq 3.938$
光子密度パラメータ	$\Omega_{\gamma 0} = 2.4729\,(21) \times 10^{-5}\ h^{-2}$

---

*7 太陽系外の恒星から見た地球の公転周期.

*8 春分点から 1 年後の春分点までにかかる時間. 地球の歳差運動により恒星年よりも短い.

*9 これら宇宙論パラメータの値や誤差は独立ではなく, 仮定する宇宙論モデルにも依存する. ここに挙げた数値は宇宙項入りの平坦宇宙モデルで, ニュートリノの質量が十分小さい場合のもの.

放射成分密度パラメータ*10	$\Omega_{r0} = g_{*0}\Omega_{\gamma 0}/2 = 4.1577\,(35) \times 10^{-5}\, h^{-2}$
バリオン密度パラメータ*9	$\Omega_{b0} = 0.02205\,(28)\, h^{-2} \simeq 0.0480\,(12)$
CDM 密度パラメータ*9	$\Omega_{c0} = 0.1187\,(17)\, h^{-2} \simeq 0.2582\,(69)$
物質成分密度パラメータ*9	$\Omega_{m0} = 0.1408\,(17)\, h^{-2} \simeq 0.3062\,(79)$
宇宙定数密度パラメータ*9	$\Omega_{\Lambda 0} = 0.692\,(10)$
密度ゆらぎの振幅*9	$\sigma_8 = 0.829\,(12)$
曲率パラメータ*11	$\Omega_{K0} = -0.0005\,(33)$
ニュートリノ密度パラメータ*11	$\Omega_{\nu 0} h^2 < 0.0025$ (95% C.L.)
ニュートリノ質量和*11	$\sum m_\nu < 0.23$ eV (95% C.L.)
ニュートリノ有効世代数*11	$N_{\rm eff} = 3.30\,(26)$
ダークエネルギーの状態方程式パラメータ*11	$w_d = -1.13\,(12)$
初期密度ゆらぎスペクトル指数*9	$n_s = 0.9608\,(54)$
走るスペクトル指数*9	$\dfrac{dn_s}{d\ln k} = -0.0143(85)$
テンソルとスカラーのスペクトル比（$k = 0.002\,{\rm Mpc}^{-1}$ における値）*9	$r_{0.002} < 0.111$ (95% C.L.)
CMB 光子の数密度	$n_{\gamma 0} = 4.1072\,(26) \times 10^8\ {\rm m}^{-3}$
バリオン数密度	$n_{b0} = \Omega_{b0}\varrho_{c0}/m_p = 0.2476\,(31) \times 10^{-1}\ {\rm m}^{-3}$
バリオン・光子比	$\eta = n_b/n_\gamma = 6.029\,(77) \times 10^{-10}$
ヘリウムと水素の原始質量比	$Y_P = 0.24770\,(12)$
エントロピー密度	$s = 2.9129\,(18) \times 10^9\ {\rm m}^{-3}$

*10　3 種類のニュートリノが放射成分として寄与する場合.

*11　他の宇宙論パラメータの見積り時にこれらのパラメータは $\Omega_{K0} = \Omega_{\nu 0} = 1 + w_d = 0$ に固定されている.

付録 B

特殊関数および数学公式

この付録では，本書で用いられる主な特殊関数や関連する数学公式などを示す．

B.1 デルタ関数

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta_{\rm D}(x-a) f(x) = f(a) \tag{B.1}$$

フーリエ表示：

$$\delta_{\rm D}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \tag{B.2}$$

$f(x) = 0$ の解を x_p $(p = 1, 2, \ldots)$ とするとき，

$$\delta_{\rm D}(f(x)) = \sum_p \frac{\delta_{\rm D}(x - x_p)}{|f'(x_p)|} \tag{B.3}$$

B.2 2 重階乗

$$n!! = \begin{cases} n(n-2)\cdots 3\cdot 1 & (n \text{ が奇数のとき}) \\ n(n-2)\cdots 4\cdot 2 & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases} \tag{B.4}$$

$$0! = 0!! = (-1)!! = 1 \tag{B.5}$$

階乗による表示：

$$(2n)!! = 2^n n!, \quad (2n-1)!! = \frac{(2n)!}{2^n n!} \tag{B.6}$$

B.3 ガンマ関数

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt = 2\int_0^\infty e^{-t^2} t^{2z-1} dt = \int_0^1 \left[\ln\left(\frac{1}{t}\right)\right]^{z-1} dt \tag{B.7}$$

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \tag{B.8}$$

倍数公式：

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z}}{2\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) \tag{B.9}$$

$$\Gamma(nz) = \frac{n^{nz}}{(2\pi)^{(n-1)/2}\sqrt{n}}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(z+\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right) \tag{B.10}$$

特別な値：

負でない整数 $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対し，

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!\sqrt{\pi}}{2^n}, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right) = \frac{(-1)^n 2^n \sqrt{\pi}}{(2n-1)!!} \tag{B.11}$$

いくつかの具体的な値：

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(2) = 1, \quad \Gamma(3) = 2, \quad \Gamma(4) = 6, \quad \Gamma(5) = 24 \tag{B.12}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}, \quad \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{15\sqrt{\pi}}{8} \tag{B.13}$$

B.4 ディガンマ関数

$$\psi(z) = \frac{d}{dz}\ln\Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \tag{B.14}$$

特別な値：

n を正の整数，$\gamma = 0.57721\cdots$ をオイラーの定数とすると，

$$\psi(n) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \tag{B.15}$$

$$\psi\left(n+\frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2\ln 2 + \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2k-1} \tag{B.16}$$

B.5 リーマン・ツェータ関数

$$\zeta(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^z} \quad (\mathrm{Re}\, z > 1) \tag{B.17}$$

を解析接続して得られる関数をリーマン・ツェータ関数という．ゼータ関数とも呼ばれる．

積分表示：

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt = \frac{1}{(1 - 2^{1-z})\Gamma(z)} \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t + 1} dt \tag{B.18}$$

いくつかの具体的な値：

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12}, \quad \zeta(0) = -\frac{1}{2}, \quad \zeta(1) = \infty, \quad \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(3) = 1.20205\cdots \tag{B.19}$$

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(5) = 1.36927\cdots, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \quad \zeta(7) = 1.00834\cdots \tag{B.20}$$

B.6 多重対数関数

$$\mathrm{Li}_s(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^s} = z + \frac{z^2}{2^s} + \frac{z^3}{3^s} + \cdots \tag{B.21}$$

を解析接続して得られる関数を多重対数関数という．

積分表示：

$$\mathrm{Li}_s(z) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t/z - 1}, \quad -\mathrm{Li}_s(-z) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t/z + 1} \tag{B.22}$$

特別な値：

$$\mathrm{Li}_s(1) = \zeta(s) \quad (\mathrm{Re}\, s > 1) \tag{B.23}$$

$$\mathrm{Li}_s(-1) = \left(2^{1-s} - 1\right)\zeta(s) \tag{B.24}$$

B.7 ベッセル関数

ベッセル関数とノイマン関数：

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \qquad (z \neq 負の実数) \tag{B.25}$$

$$N_\nu(z) = \frac{\cos(\nu\pi)\,J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)} \qquad (\nu \neq 整数,\ z \neq 負の実数) \tag{B.26}$$

第 1 種および第 2 種ハンケル関数：

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iN_\nu(z), \quad H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - iN_\nu(z) \tag{B.27}$$

これら 4 つの関数を合わせたものを広義ベッセル関数という.

ベッセル微分方程式：

$$z^2\frac{d^2F}{dz^2} + z\frac{dF}{dz} + \left(z^2 - \nu^2\right)F = 0 \tag{B.28}$$

広義ベッセル関数はすべてベッセル微分方程式を満たす.

第 1 種および第 2 種変形ベッセル関数：

正の実数 x に対して

$$I_\nu(x) = i^{-\nu}J_\nu(ix) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \tag{B.29}$$

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2}\,\frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin\nu\pi} = \frac{i\pi}{2}e^{i\nu\pi/2}H_\nu^{(1)}(ix) \quad (\nu \neq 整数) \tag{B.30}$$

$$\begin{aligned} K_n(x) = K_{-n}(x) &= \frac{(-1)^n}{2}\left[\frac{\partial I_{-\nu}(x)}{\partial\nu} - \frac{\partial I_\nu(x)}{\partial\nu}\right]_{\nu=n} \\ &= (-1)^{n+1}I_n(x)\left(\gamma + \ln\frac{z}{2}\right) \quad (n = 整数) \end{aligned} \tag{B.31}$$

B.8 球ベッセル関数

l を整数とする.

球ベッセル関数，球ノイマン関数：

$$j_l(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{l+\frac{1}{2}}(z), \quad n_l(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} N_{l+\frac{1}{2}}(z) = (-1)^{l+1} j_{-l-1}(z) \tag{B.32}$$

第 1 種および第 2 種球ハンケル関数：

$$h_l^{(1)}(z) = j_l(z) + i n_l(z), \quad h_l^{(2)}(z) = j_l(z) - i n_l(z) \tag{B.33}$$

これら 4 つの関数を合わせたものを広義ベッセル関数という．

球ベッセル微分方程式：

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \frac{2}{z}\frac{df}{dz} + \left[1 - \frac{l(l+1)}{z^2}\right] f = 0 \tag{B.34}$$

広義球ベッセル関数はすべて球ベッセル微分方程式を満たす．

レイリーの公式：

$$j_l(z) = (-1)^l z^l \left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^l \frac{\sin z}{z}, \quad n_l(z) = -(-1)^l z^l \left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^l \frac{\cos z}{z} \tag{B.35}$$

いくつかの具体形：

$$j_0(z) = \frac{\sin z}{z}, \quad j_1(z) = \frac{\sin z}{z^2} - \frac{\cos z}{z}, \quad j_2(z) = \left(\frac{3}{z^2} - 1\right)\frac{\sin z}{z} - \frac{3\cos z}{z^2} \tag{B.36}$$

$$j_{-1}(z) = -n_0(z) = \frac{\cos z}{z}, \quad j_{-2}(z) = n_1(z) = -\frac{\cos z}{z^2} - \frac{\sin z}{z} \tag{B.37}$$

直交関係：

$$\int_0^\infty r^2 dr\, j_l(kr)\, j_l(k'r) = \frac{\pi}{2k^2}\delta(k - k') \tag{B.38}$$

再帰関係式：

f_l が広義の球ベッセル関数 $j_l, n_l, h_l^{(1)}, h_l^{(2)}$ のいずれかであるとき，

$$f_l(z) = \frac{z}{2l+1}\left[f_{l+1}(z) + f_{l-1}(z)\right] \tag{B.39}$$

$$\frac{d}{dz} f_l(z) = \frac{l f_{l-1}(z) - (l+1) f_{l+1}(z)}{2l+1} = \frac{l}{z} f_l(z) - f_{l+1}(z) = f_{l-1}(z) - \frac{l+1}{z} f_l(z) \tag{B.40}$$

$$\frac{d}{dz}\left[z^{l+1} f_l(z)\right] = z^{l+1} f_{l-1}(z), \quad \frac{d}{dz}\left[\frac{f_l(z)}{z^l}\right] = -\frac{f_{l+1}(z)}{z^l} \tag{B.41}$$

近似式と漸近形：

$$j_l(z) \sim \frac{z^l}{(2l+1)!!}, \qquad n_l(z) \sim -\frac{(2l-1)!!}{z^{l+1}} \qquad (z \to 0) \tag{B.42}$$

$$j_l(z) \sim \frac{1}{z}\cos\left[z - \frac{(l+1)\pi}{2}\right], \quad n_l(z) \sim \frac{1}{z}\sin\left[z - \frac{(l+1)\pi}{2}\right] \qquad (z \to \infty) \tag{B.43}$$

B.9 ルジャンドル多項式

$$P_l(z) = \frac{1}{2^l}\sum_k \frac{(-1)^k(2l-2k)!}{k!\,(l-k)!\,(l-2k)!} z^{l-2k} \tag{B.44}$$

$$= \frac{1}{2^l}\sum_k (-1)^k \binom{l}{k}\binom{2l-2k}{l} z^{l-2k} \tag{B.45}$$

ただし，第 1 式において，すべての階乗の中身が負でない整数になる k について和をとる．

ルジャンドル微分方程式：

$$\frac{d}{dz}\left[(1-z^2)\frac{d}{dz}P_l(z)\right] + l(l+1)P_l(z) = 0 \tag{B.46}$$

ロドリゲス表示：

$$P_l(z) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dz^l}\left(z^2-1\right)^l \tag{B.47}$$

再帰関係式：

$$(l+1)P_{l+1}(z) = (2l+1)zP_l(z) - lP_{l-1}(z) \tag{B.48}$$

いくつかの具体形：

$$P_0(z) = 1, \quad P_1(z) = z, \quad P_2(z) = \frac{1}{2}\left(3z^2-1\right), \quad P_3(z) = \frac{1}{2}\left(5z^3-3z\right),$$
$$P_4(z) = \frac{1}{8}\left(35z^4-30z^2+3\right), \quad P_5(z) = \frac{1}{8}\left(63z^4-70z^2+15\right) \tag{B.49}$$

べき乗の表現：

$$1 = P_0(z), \quad z = P_1(z), \quad z^2 = \frac{1}{3}P_0(z) + \frac{2}{3}P_2(z), \quad z^3 = \frac{3}{5}P_1(z) + \frac{2}{5}P_3(z),$$

$$z^4 = \frac{1}{5}P_0(z) + \frac{4}{7}P_2(z) + \frac{8}{35}P_4(z), \quad z^5 = \frac{3}{7}P_1(z) + \frac{4}{9}P_3(z) + \frac{8}{63}P_5(z) \tag{B.50}$$

直交性と完全性：

$$\int_{-1}^{1} dx\, P_l(x)P_{l'}(x) = \frac{2\delta_{ll'}}{2l+1} \tag{B.51}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)P_l(x)P_l(x') = 2\delta(x-x') \tag{B.52}$$

積分公式：

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} dx\, P_l(x)\, e^{ixz} = i^l j_l(z) \tag{B.53}$$

レイリー展開公式：

$$e^{ix\mu} = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)i^l j_l(x)P_l(\mu) \tag{B.54}$$

加法定理：

$\mu = \hat{\boldsymbol{r}}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{r}}_2$ とするとき，

$$j_0(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|) = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)j_l(r_1)j_l(r_2)P_l(\mu) \tag{B.55}$$

$$\frac{j_n(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|)}{|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|^n} = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+2n+1)\frac{j_{l+n}(r_1)}{{r_1}^n}\frac{j_{l+n}(r_2)}{{r_2}^n}\frac{d^n P_{l+n}(\mu)}{d\mu^n} \tag{B.56}$$

B.10 ルジャンドル陪多項式

$m \geq 0$ とするとき，

$$P_l^m(x) = (-1)^m \left(1 - x^2\right)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) \tag{B.57}$$

$$= \frac{(-1)^m}{2^l l!} \left(1 - x^2\right)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} \left(x^2 - 1\right)^l \tag{B.58}$$

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m (1 - x^2)^{-m/2} \int_x^1 dx \cdots \int_x^1 dx\, P_l(x) \tag{B.59}$$

$$= (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x) \tag{B.60}$$

上の定義式 (B.57), (B.58) に現れる因子 $(-1)^m$ は**コンドン-ショートレイ位相** (Condon-Shortley phase) と呼ばれ，文献によってはこの因子を含まない定義を採用する場合がある．コンドン-ショートレイ位相を含まない多項式を $P_{lm}(x) = (-1)^m P_l^m(x)$ として区別する場合もある．

ルジャンドルの陪微分方程式：

$$\frac{d}{dx}\left[(1 - x^2)\frac{d}{dx} P_l^m(x)\right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1 - x^2}\right] P_l^m(x) = 0 \tag{B.61}$$

具体的表示：

$$P_l^m(\cos\theta) = (-1)^m \frac{\sin^m \theta}{2^m} \sum_{r=0}^{l-m} \frac{(-1)^r (l+m+r)!}{r!\,(m+r)!\,(l-m-r)!} \sin^{2r} \frac{\theta}{2} \tag{B.62}$$

$$= (-1)^l \frac{\sin^m \theta}{2^m} \sum_{r=0}^{l-m} \frac{(-1)^r (l+m+r)!}{r!\,(m+r)!\,(l-m-r)!} \cos^{2r} \frac{\theta}{2} \tag{B.63}$$

いくつかの具体形：

$$\begin{aligned}
&P_0^0(x) = 1, \quad P_1^0(x) = x, \quad P_1^1(x) = -\left(1 - x^2\right)^{1/2}, \\
&P_2^0(x) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right), \quad P_2^1(x) = -3x\left(1 - x^2\right)^{1/2}, \quad P_2^2(x) = 3\left(1 - x^2\right), \\
&P_3^0(x) = \frac{1}{2}x\left(5x^2 - 3\right), \quad P_3^1(x) = \frac{3}{2}\left(1 - 5x^2\right)\left(1 - x^2\right)^{1/2}, \\
&P_3^2(x) = 15x\left(1 - x^2\right), \quad P_3^3(x) = -15\left(1 - x^2\right)^{3/2}
\end{aligned} \tag{B.64}$$

$$\begin{aligned}
&P_0^0(\cos\theta) = 1, \quad P_1^0(\cos\theta) = \cos\theta, \quad P_1^1(\cos\theta) = -\sin\theta, \\
&P_2^0(\cos\theta) = \frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right), \quad P_2^1(\cos\theta) = -3\sin\theta\cos\theta, \quad P_2^2(\cos\theta) = 3\sin^2\theta, \\
&P_3^0(\cos\theta) = \frac{1}{2}\cos\theta\left(5\cos^2\theta - 3\right), \quad P_3^1(\cos\theta) = \frac{3}{2}\left(1 - 5\cos^2\theta\right)\sin\theta, \\
&P_3^2(\cos\theta) = 15\cos\theta\sin^2\theta, \quad P_3^3(\cos\theta) = -15\sin^3\theta
\end{aligned} \tag{B.65}$$

直交性：

$$\int_{-1}^{1} dx P_l^m(x) P_{l'}^m(x) = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll'} \tag{B.66}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1-x^2} P_l^m(x) P_l^{m'}(x) = \frac{(l+m)!}{m\,(l-m)!} \delta_{mm'} \tag{B.67}$$

B.11 球面調和関数

$$Y_l^m(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta)\, e^{im\phi} \tag{B.68}$$

$$= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos\theta)\, e^{im\phi} \times \begin{cases} 1 & (m \geq 0) \\ (-1)^m & (m < 0) \end{cases} \tag{B.69}$$

具体的表示：

$$Y_l^m(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\, e^{im\phi} \sum_{r=\max(0,m)}^{\min(l,l+m)} \frac{(-1)^r l!\, \sqrt{(l+m)!\,(l-m)!}}{r!\,(r-m)!\,(l-r)!\,(l+m-r)!} \times \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2l+m-2r} \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2r-m} \tag{B.70}$$

いくつかの具体形：

$$Y_0^0(\theta,\phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_1^0(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta, \quad Y_1^{\pm1}(\theta,\phi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta\, e^{\pm i\phi},$$

$$Y_2^0(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \left(3\cos^2\theta - 1\right), \quad Y_2^{\pm1}(\theta,\phi) = \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta\cos\theta\, e^{\pm i\phi},$$

$$Y_2^{\pm2}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2\theta\, e^{\pm2i\phi}, \quad Y_3^0(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{7}{16\pi}} \cos\theta \left(5\cos^2\theta - 3\right),$$

$$Y_3^{\pm1}(\theta,\phi) = \mp\sqrt{\frac{21}{64\pi}} \sin\theta \left(5\cos^2\theta - 1\right) e^{\pm i\phi}, \quad Y_3^{\pm2}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{105}{32\pi}} \sin^2\theta\cos\theta\, e^{\pm2i\phi},$$

$$Y_3^{\pm3}(\theta,\phi) = \mp\sqrt{\frac{35}{64\pi}} \sin^3\theta\, e^{\pm3i\phi} \tag{B.71}$$

直交性と完全性：

$$\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi\, Y_l^{m*}(\theta,\phi) Y_{l'}^{m'}(\theta,\phi) = \delta_{mm'}\delta_{ll'} \tag{B.72}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} Y_l^{m*}(\theta,\phi)\, Y_l^m(\theta',\phi') = \delta_{\rm D}(\cos\theta - \cos\theta')\,\delta_{\rm D}(\phi-\phi') \tag{B.73}$$

空間反転：

$$Y_l^m(\pi-\theta,\phi+\pi) = (-1)^l Y_l^m(\theta,\phi) \tag{B.74}$$

複素共役：

$$Y_l^{m*}(\theta,\phi) = (-1)^m Y_l^{-m}(\theta,\phi) \tag{B.75}$$

特別な形：

$$Y_l^m(0,\varphi) = \delta_{m0}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}, \quad Y_l^0(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}P_l(\cos\theta) \tag{B.76}$$

方位角積分：

$$\int_0^{2\pi} d\phi Y_l^m(\theta,\phi) = 2\pi\delta_{m0}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}P_l(\cos\theta) \tag{B.77}$$

加法定理：

2 つの極座標 (θ_1,ϕ_1) と (θ_2,ϕ_2) の間の角度が θ のとき，

$$\frac{4\pi}{2l+1}\sum_m Y_l^{m*}(\theta_1,\phi_1) Y_l^m(\theta_2,\phi_2) = P_l(\cos\theta) \tag{B.78}$$

3 つの積の積分：

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi\, & Y_{l_1}^{m_1}(\theta,\phi) Y_{l_2}^{m_2}(\theta,\phi) Y_{l_3}^{m_3}(\theta,\phi) \\ &= \sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l_3+1)}{4\pi}}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{B.79}$$

ただし $\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$ はウィグナーの $3j$ 記号.

B.12 回転行列

回転演算子の定義：

3 次元直交基底を $\mathbf{e}_i$ $(i = x, y, z)$ とするとき，任意のベクトルは $\boldsymbol{V} = V_i\mathbf{e}_i$ と表される．回転行列 R_{ij} による基底の変換を

$$\mathbf{e}_i \to \mathbf{e}'_i = \mathbf{e}_j R_{ji} = (R^{-1})_{ij}\mathbf{e}_j \tag{B.80}$$

とすると，回転行列は $R_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_j$ で与えられ

$$R^{\mathrm{T}} = R^{-1}, \quad R^* = R, \quad \det R = 1 \tag{B.81}$$

を満たす．ベクトル $\boldsymbol{V}$ を空間に固定しておけば $\boldsymbol{V} = V_i\mathbf{e}_i = V'_i\mathbf{e}'_i$ であるから，成分 V_i の変換は

$$V_i \to V'_i = R_{ij}V_j \tag{B.82}$$

となり，基底の変換とは逆の変換行列がかかる．

オイラー角 (α, β, γ) による回転により球座標 $\Omega = (\theta, \phi)$ が $\Omega' = R\Omega$ へ変換されるとき，球面上のスカラー関数 $f(\Omega)$ は $f'(\Omega') = f(\Omega)$ を満たす．ここで関数形の変化を $f' = D(R)f$ という演算子 $D(R)$ により表現し，

$$f'(\Omega') = D(R)f(\Omega') \tag{B.83}$$

と定義する．この演算子 $D(R)$ を回転演算子という．任意のスカラー関数 $f(\Omega)$ に対して，

$$D(R)f(\Omega) = f(R^{-1}\Omega) \tag{B.84}$$

が成り立つ．

回転演算子の表現行列：

角運動量演算子を $\boldsymbol{J} = (J_x, J_y, J_z)$ とし，オイラー角 (α, β, γ) により座標軸を回転するとき，

$$D(\alpha,\beta,\gamma) = e^{-i\alpha J_z} e^{-i\beta J_y} e^{-i\gamma J_z} \tag{B.85}$$

$$D^l_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma) = \langle lm' \,|D(\alpha,\beta,\gamma)|\, lm\rangle \tag{B.86}$$

ただし $|lm\rangle$ は J^2, J_z の同時固有状態，$l = 0, 1/2, 1, 3/2, \ldots$ は負でない整数または半整数，また m, m' のとる値は $-l, -l+1, \ldots, l-1, l$ である．関数 $D^l_{m'm}$ はウィグナーの D 関数と呼ばれ，回転演算子 D の $2l+1$ 次元表現である．

回転行列の具体的表現：

$$D^l_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma) = e^{-im'\alpha} d^l_{m'm}(\beta) e^{-im\gamma} \tag{B.87}$$

ここで $d^l_{m'm}(\theta) = D^l_{m'm}(0,\theta,0)$ はウィグナー d 関数と呼ばれ，次式で与えられる：

$$d^l_{m'm}(\theta) = \left\langle lm' \left| e^{-i\theta J_y} \right| lm \right\rangle \tag{B.88}$$

$$= \sum_{r=\max(0,m'-m)}^{\min(l-m,l+m')} \frac{(-1)^r \sqrt{(l+m)!\,(l-m)!\,(l+m')!\,(l-m')!}}{r!\,(l-m-r)!\,(l+m'-r)!\,(m-m'+r)!} \times \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2l-m+m'-2r} \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{m-m'+2r} \tag{B.89}$$

ウィグナー d 関数の対称性：

$$d^l_{m'm}(\theta) = (-)^{m'-m} d^l_{m\,m'}(\theta) = d^l_{-m,-m'}(\theta) = d^l_{m\,m'}(-\theta) \tag{B.90}$$

逆回転（ユニタリ性）：

$$D^l_{m'm}(-\gamma,-\beta,-\alpha) = D^{l*}_{m\,m'}(\alpha,\beta,\gamma) \tag{B.91}$$

複素共役：

$$D^{l*}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma) = (-)^{m'-m} D^l_{-m',-m}(\alpha,\beta,\gamma) \tag{B.92}$$

規格直交関係：

$$\sum_{m''} D^{l*}_{m\,m''}(\alpha,\beta,\gamma) D^l_{m'm''}(\alpha,\beta,\gamma) = \delta_{m\,m'} \tag{B.93}$$

$$\sum_{m''} D^{l*}_{m''m}(\alpha,\beta,\gamma) D^l_{m''m'}(\alpha,\beta,\gamma) = \delta_{m\,m'} \tag{B.94}$$

直交性と完全性：

$$\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi} d\beta \sin\beta \int_0^{2\pi} d\gamma\, D^{l_1 *}_{m_1 m_1'}(\alpha,\beta,\gamma)\, D^{l_2}_{m_2 m_2'}(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{8\pi^2}{2l_1+1}\delta_{m_1 m_2}\delta_{m_1' m_2'}\delta_{l_1 l_2} \tag{B.95}$$

$$\sum_{l,m,m'} D^{l *}_{m' m}(\alpha,\beta,\gamma)\, D^{l}_{m' m}(\alpha',\beta',\gamma') = \frac{8\pi^2}{2l+1}\delta_{\mathrm{D}}(\alpha-\alpha')\,\delta_{\mathrm{D}}(\cos\beta-\cos\beta')\,\delta_{\mathrm{D}}(\gamma-\gamma') \tag{B.96}$$

還元公式と結合公式：

以下の回転行列はすべて同じオイラー角を引数に持つとする．

$$D^{l_1}_{m_1 m_1'} D^{l_2}_{m_2 m_2'} = \sum_{l,m,m'} \langle l_1, m_1; l_2, m_2 | l, m\rangle \left\langle l_1, m_1'; l_2, m_2' \middle| l, m'\right\rangle D^{l}_{m,m'} \tag{B.97}$$

$$D^{l}_{m,m'} = \sum_{m_1,m_1',m_2,m_2'} \langle l_1, m_1; l_2, m_2 | l, m\rangle \left\langle l_1, m_1'; l_2, m_2' \middle| l, m'\right\rangle D^{l_1}_{m_1 m_1'} D^{l_2}_{m_2 m_2'} \tag{B.98}$$

ただし $\langle l_1, m_1; l_2, m_2 | l, m\rangle$, $\left\langle l_1, m_1'; l_2, m_2' \middle| l, m'\right\rangle$ はクレブシュ-ゴーダン係数で，それぞれ $m_1 + m_2 = m$, $m_1' + m_2' = m'$ を満たすときだけ値を持つ．

特別な値：

$$D^{l}_{m0}(\alpha,\beta,\gamma) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\, Y_l^{m*}(\beta,\alpha) \tag{B.99}$$

$$D^{l}_{0m}(\alpha,\beta,\gamma) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\, Y_l^{m}(-\beta,-\gamma) \tag{B.100}$$

$$D^{l}_{00}(\alpha,\beta,\gamma) = P_l(\cos\beta) \tag{B.101}$$

球面調和関数の回転：

オイラー角 (α,β,γ) による回転により球座標値 $\varOmega'$ が $\varOmega = R\varOmega'$ へ変換されるとき，

$$Y_l^m(\varOmega') = Y_l^m(R^{-1}\varOmega) = D(R) Y_l^m(\varOmega) \tag{B.102}$$

$$= \sum_{m'} Y_l^{m'}(\varOmega) D^{l}_{m' m}(\alpha,\beta,\gamma) = \sum_{m'} D^{l *}_{m m'}(-\gamma,-\beta,-\alpha) Y_l^{m'}(\varOmega) \tag{B.103}$$

B.13 クレブシュ-ゴーダン係数

ラカーの公式：

$$\langle l_1, m_1; l_2, m_2 | l, m\rangle = \delta_{m_1+m_2,m}\sqrt{2l+1}\sqrt{\frac{(l_1+l_2-l)!\,(l+l_1-l_2)!\,(l+l_2-l_1)!}{(l_1+l_2+l+1)!}}$$
$$\times\sqrt{(l_1+m_1)!\,(l_1-m_1)!\,(l_2+m_2)!\,(l_2-m_2)!\,(l+m)!\,(l-m)!}$$
$$\times\sum_r\frac{(-1)^r}{r!}\frac{1}{(l_1+l_2-l-r)!\,(l_1-m_1-r)!\,(l_2+m_2-r)!}$$
$$\times\frac{1}{(l-l_2+m_1+r)!\,(l-l_1-m_2+r)!} \quad \text{(B.104)}$$

ただし，上式ではすべての階乗が負でないすべての整数 r について和をとる．すなわち，

$$\max(0, l_2-l-m_1, l_1-l+m_2)\le r\le\min(l_l+l_2-l, l_1-m_1, l_2+m_2) \quad \text{(B.105)}$$

を満たす整数についての和．

ウィグナーの $3j$ 記号：

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3\end{pmatrix}\equiv\frac{(-1)^{j_1-j_2-m_3}}{\sqrt{2j_3+1}}\langle j_1, m_1; j_2, m_2 | j_3, -m_3\rangle \quad \text{(B.106)}$$

B.14 スピン球面調和関数

回転行列による定義：

$${}_sY_l^m(\theta,\phi)\equiv(-1)^m\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}d^l_{-m,s}(\theta)\,e^{im\phi}=(-1)^m\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}d^l_{-s,m}(\theta)\,e^{im\phi} \quad \text{(B.107)}$$
$$=(-1)^m\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\,D^l_{-m,s}(\phi,\theta,0)=(-1)^m\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\,D^{l*}_{-s,m}(0,\theta,\phi) \quad \text{(B.108)}$$

具体的表式：

$${}_sY_l^m(\theta,\phi)=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\,e^{im\phi}\sum_r\frac{(-1)^{r-s}\sqrt{(l+s)!\,(l-s)!\,(l+m)!\,(l-m)!}}{r!\,(r-s-m)!\,(l+s-r)!\,(l+m-r)!}$$
$$\times\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2l+s+m-2r}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2r-s-m} \quad \text{(B.109)}$$

上式ではすべての階乗が負でないすべての整数 r について和をとる．すなわち $\max(0, m+s) \le r \le \min(l+s, l+m)$ となる整数.

$$
{}_sY_l^m(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\,\frac{(l+m)!\,(l-m)!}{(l+s)!\,(l-s)!}}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2l} e^{im\phi} \times \sum_r (-1)^{l+m-s-r}\begin{pmatrix} l-s \\ r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l+s \\ r+s-m \end{pmatrix}\left(\cot\frac{\theta}{2}\right)^{2r+s-m} \quad \text{(B.110)}
$$

上式では r の和を 2 項係数に意味があるような値についてとる．すなわち $\max(0, m-s) \le r \le \min(l+m, l-s)$ となる整数.

整数スピンに対するいくつかの具体形：

$$
\begin{aligned}
&{}_1Y_1^0(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta, \quad {}_1Y_1^{\pm1}(\theta,\phi) = -\sqrt{\frac{3}{16\pi}}\,(1\mp\cos\theta)\,e^{\pm i\phi},\\
&{}_1Y_2^0(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{15}{8\pi}}\,\sin\theta\cos\theta, \quad {}_1Y_2^{\pm1}(\theta,\phi) = -\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\,(\cos\theta\mp\cos2\theta)\,e^{\pm i\phi},\\
&{}_1Y_2^{\pm2}(\theta,\phi) = \pm\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\,\sin\theta\,(1\mp\cos\theta)\,e^{\pm2i\phi}, \quad {}_2Y_2^0(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta,\\
&{}_2Y_2^{\pm1}(\theta,\phi) = -\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\sin\theta\,(1\mp\cos\theta)\;e^{\pm i\phi}, \quad {}_2Y_2^{\pm2}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{5}{64\pi}}\,(1\mp\cos\theta)^2\;e^{\pm2i\phi}
\end{aligned}
\quad \text{(B.111)}
$$

一般の回転行列との関係：

$$
D^{(l)}_{m'm}(\phi,\theta,\psi) = (-1)^{m'}\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\;{}_mY_l^{-m'}(\theta,\phi)e^{-im\psi} \quad \text{(B.112)}
$$

$$
= (-1)^{m}\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\;{}_{-m}Y_l^{m'*}(\theta,\phi)e^{-im\psi} \quad \text{(B.113)}
$$

複素共役：

$$
{}_sY_l^{m*}(\theta,\phi) = (-1)^{m+s}\;{}_{-s}Y_l^{-m}(\theta,\phi) \quad \text{(B.114)}
$$

直交性と完全性：

$$
\int \sin\theta d\theta d\phi\;{}_sY_l^{m*}(\theta,\phi)\;{}_sY_{l'}^{m'}(\theta,\phi) = \delta_{ll'}\delta_{mm'} \quad \text{(B.115)}
$$

$$
\sum_{l,m} {}_sY_l^{m*}(\theta,\phi)\;{}_sY_l^{m}(\theta',\phi') = \delta_{\mathrm{D}}(\cos\theta-\cos\theta')\,\delta_{\mathrm{D}}(\phi-\phi') \quad \text{(B.116)}
$$

空間反転変換：

$$ {}_sY_l^m(\pi-\theta,\phi+\pi) = (-1)^l \, {}_{-s}Y_l^m(\theta,\phi) \tag{B.117} $$

いくつかの特別な値：

$$ {}_0Y_l^m(\theta,\phi) = Y_m^l(\theta,\phi) \tag{B.118} $$

$$ {}_sY_l^m(0,\phi) = \delta_{-s,m}(-1)^{-s}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\, e^{-is\phi} \tag{B.119} $$

方位角積分：

$$ \int d\phi \, {}_sY_l^m(\theta,\phi) = \delta_{m0}\, {}_sY_l^0(\theta,0) \tag{B.120} $$

加法定理：

$$ \sum_m {}_{s_1}Y_l^{m*}(\theta_1,\phi_1)\, {}_{s_2}Y_l^m(\theta_2,\phi_2) = (-1)^{s_1}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\, {}_{s_2}Y_l^{-s_1}(\theta,\phi)\, e^{-is_2\psi} \tag{B.121} $$

ただし，オイラー角による回転 $(\phi_2,\theta_2,0)$ に続いて $(0,-\theta_1,-\phi_1)$ を合成した変換のオイラー角が (ϕ,θ,ψ) であり，

$$ \cos\theta = \cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\phi_2-\phi_1) \tag{B.122} $$

および

$$ e^{-i(\phi+\psi)/2} = \frac{\cos[(\phi_2-\phi_1)/2]\cos[(\theta_2-\theta_1)/2] - i\sin[(\phi_2-\phi_1)/2]\cos[(\theta_2+\theta_1)/2]}{\sqrt{\cos^2[(\phi_2-\phi_1)/2]\cos^2[(\theta_2-\theta_1)/2] + \sin^2[(\phi_2-\phi_1)/2]\cos^2[(\theta_2+\theta_1)/2]}} \tag{B.123} $$

$$ e^{i(\phi-\psi)/2} = \frac{\cos[(\phi_2-\phi_1)/2]\sin[(\theta_2-\theta_1)/2] + i\sin[(\phi_2-\phi_1)/2]\sin[(\theta_2+\theta_1)/2]}{\sqrt{\cos^2[(\phi_2-\phi_1)/2]\sin^2[(\theta_2-\theta_1)/2] + \sin^2[(\phi_2-\phi_1)/2]\sin^2[(\theta_2+\theta_1)/2]}} \tag{B.124} $$

とくに角度 θ は球面上の 2 点 (θ_1,ϕ_1), (θ_2,ϕ_2) を原点から見込む角度に等しいため，座標系に依存しない．特別な場合として $\theta_1=\theta_2, \phi_1=\phi_2$ のとき

$$ \sum_m {}_{s'}Y_l^{m*}(\theta,\phi)\, {}_sY_l^m(\theta,\phi) = \frac{2l+1}{4\pi}\,\delta_{s's} \tag{B.125} $$

スピン昇降演算子：

$_sf(\theta,\phi)$ を球面上のスピン s 関数とするとき，

$$ð\,_sf = -\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{i}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} - s\cot\theta\right)\,_sf = -\sin^s\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{i}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\left(\frac{_sf}{\sin^s\theta}\right) \quad \text{(B.126)}$$

$$\bar{ð}\,_sf = -\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{i}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} + s\cot\theta\right)\,_sf = -\frac{1}{\sin^s\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{i}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)(_sf\sin^s\theta) \quad \text{(B.127)}$$

はそれぞれスピン $s+1$, $s-1$ の関数になる．

$$ð\,_sY_l^m = \sqrt{(l-s)(l+s+1)}\;_{s+1}Y_l^m \quad \text{(B.128)}$$

$$\bar{ð}\,_sY_l^m = -\sqrt{(l+s)(l-s+1)}\;_{s-1}Y_l^m \quad \text{(B.129)}$$

$$\bar{ð}ð\,_sY_l^m = -(l-s)(l+s+1)\;_sY_l^m \quad \text{(B.130)}$$

$$ð\bar{ð}\,_sY_l^m = -(l-s+1)(l+s)\;_sY_l^m \quad \text{(B.131)}$$

$$_sY_l^m = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{(l-s)!}{(l+s)!}}\,ð^sY_l^m & (0 \le s \le l) \\ (-1)^{-|s|}\sqrt{\dfrac{(l-|s|)!}{(l+|s|)!}}\,\bar{ð}^{|s|}Y_l^m & (-l \le s \le 0) \\ 0 & (|s| > l) \end{cases} \quad \text{(B.132)}$$

参考図書

参考文献は本文中にも注記したが，ここでは本書に関係の深い一般的な参考書や，本書で全般的に参考にした書物などを紹介する．

相対性理論

[1] C・W・ミスナー，K・S・ソーン，J・A・ホィーラー『重力理論——古典力学から相対性理論まで，時空の幾何学から宇宙の構造へ』若野省己訳（丸善出版，2011）[C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler: *Graviation* (W. H. Freeman & Co, 1973)]

[2] ランダウ，リフシッツ『場の古典論——電気力学，特殊および一般相対性理論（原書第 6 版）』恒藤敏彦，広重徹訳〔ランダウ＝リフシッツ理論物理学教程〕（東京図書，1978）[L. D. Landau and E. M. Lifshitz: *The Classical Theory of Fields*, 4th Revised English Edition (Butterworth-Heinemann, 1975)]

[3] 内山龍雄『相対性理論』〔物理テキストシリーズ 8〕（岩波書店，1987）

[4] 佐々木節『一般相対論』（産業図書，1996）

[5] B・シュッツ『第 2 版シュッツ相対論入門』江里口良治，二間瀬敏史訳（丸善，2010）

[6] N. Straumann: *General Relativity*, 2nd Edition (Springer, 2013)

宇宙論全般

[7] 成相秀一，冨田憲二『一般相対論的宇宙論』〔物理学選書 19〕（裳華房，1988）

[8] 小玉英雄『相対論的宇宙論』〔パリティ物理学コース〕（丸善，1991）

[9] S・ワインバーグ『ワインバーグの宇宙論 上，下』小松英一郎訳（日本評論社，2013）[S. Weinberg: *Cosmology* (Oxford University Press, 2008)]

[10] 佐藤勝彦ほか『宇宙論 I——宇宙のはじまり』〔シリーズ現代の天文学 2〕（日本評論社，2008）

[11] 二間瀬敏史ほか『宇宙論 II——宇宙の進化』〔シリーズ現代の天文学 3〕（日本評論社，2008）

[12] 松原隆彦『現代宇宙論——時空と物質の共進化』（東京大学出版会，2010）

[13] 辻川信二『現代宇宙論講義』〔SGC ライブラリ 99〕（サイエンス社，2013）

[14] S. Weinberg: *Gravitation and Cosmology* (John Wiley and Sons, Inc., 1972)

[15] P. J. E. Peebles: *Principles of Physical Cosmology* (Princeton University Press, 1993)

[16] J. A. Peacock: *Cosmological Physics* (Cambridge University Press, 1999)

場の量子論

[17] 中西襄『場の量子論』〔新物理学シリーズ 19〕（培風館，1975）
[18] 西島和彦『場の理論』〔紀伊國屋数学叢書 27〕（紀伊國屋書店，1987）
[19] 九後汰一郎『ゲージ場の量子論 I, II』〔新物理学シリーズ 23, 24〕（培風館，1989）
[20] M. E. Peskin and D. V. Schroeder: *An Introduction to Quantum Field Theory* (Westview Press, 1995)
[21] S・ワインバーグ『ワインバーグ 場の量子論』1 巻～6 巻，青山秀明，有末宏明，杉山勝之訳（吉岡書店，1997–2003）[S. Weinberg: *The Quantum Theory of Fields* (Cambridge University Press, 2006)]
[22] 日置善郎『場の量子論——摂動計算の基礎』（吉岡書店，1999）
[23] W. Greiner and D. A. Bromley: *Relativistic Quantum Mechanics. Wave Equations*, 3rd Edition (Springer, 2000)
[24] C. Itzykson and J.-B. Zuber: *Quantum Field Theory* (Dover, 2006)
[25] W. Greiner and J. Reinhardt: *Quantum Electrodynamics*, 4th Edition (Springer, 2008)

素粒子標準理論

[26] V・P・ナイア『現代的な視点からの場の量子論 基礎編，発展編』阿部泰裕，磯暁訳（丸善出版，2012）[V. P. Nair: *Quantum Field Theory* (Springer, 2005)]
[27] 川村嘉春『例題形式で学ぶ現代素粒子物理学』〔SGC ライブラリ 48〕（サイエンス社，2006）
[28] M. Fukugita and T. Yanagida: *Physics of Neutrinos and Applications to Astrophysics* (Springer-Verlag, 2003)
[29] R. N. Mohapatra and P. B. Pal: *Massive Neutrinos in Physics and Astrophysics*, 3rd Edition (World Scientific, 2004)
[30] W. Greiner and B. Müller: *Gauge Theory of Weak Interactions*, 4th Edition (Springer, 2009)
[31] F. Mandl and G. Shaw: *Quantum Field Theory*, 2nd Edition (Wiley, 2010)
[32] C. Quigg: *Gauge Theories of the Strong, Weak and Electromagnetic Interactions*: 2nd Edition (Princeton University Press, 2013)

相対論的運動学

[33] J. M. Stewart: *Non-Equilibrium Relativistic Kinetic Theory* (Springer-Verlag, 1971)
[34] S. R. de Groot, W. A. van Leeuwen and Ch. G. van Weert: *Relativistic Kinetic Theory: Principles and Applications* (Elsevier, 1980)
[35] J. Bernstein: *Kinetic Theory in the Expanding Universe* (Cambridge University Press, 1988)

[36] C. Cercignani and G. M. Kremer: *The Relativistic Boltzmann Equation: Theory and Applications* (Birkhäuser, 2002)

初期宇宙論

[37] E. W. Kolb and M. S. Turner: *The Early Universe* (Westview Press, 1994)
[38] A. R. Liddle and D. H. Lyth: *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure* (Cambridge Unviersity Press, 2000)
[39] G. Börner: *The Early Universe: Facts and Fiction*, 4th Edition (Springer, 2004)
[40] V. Mukhanov: *Physical Foundations of Cosmology* (Cambridge Unviersity Press, 2005)
[41] P. Peter and J.-P. Uzan (tanslated by J. Brujić and C. de Rham): *Primordial Cosmology* (Oxford Unviersity Press, 2009)
[42] D. H. Lyth and A. R. Liddle: *The Primordial Density Perturbation: Cosmology, Inflation and the Origin of Structure* (Cambridge University Press, 2009)
[43] D. S. Gorbunov and V. A. Rubakov: *Introduction to the Theory of the Early Universe: Hot Big Bang Theory* (World Scientific, 2011)
[44] D. S. Gorbunov and V. A. Rubakov: *Introduction to the Theory of the Early Universe: Cosmological Perturbations and Inflationary Theory* (World Scientific, 2011)
[45] G. F. R. Ellis, R. Maartens and M. A. H. MacCallum: *Relativistic Cosmology* (Cambridge University Press, 2012)

宇宙マイクロ波背景放射，宇宙の構造形成

[46] 池内了『観測的宇宙論』（東京大学出版会，1997）
[47] 松原隆彦『大規模構造の宇宙論——宇宙に生まれた絶妙な多様性』〔基本法則から読み解く物理学最前線 4〕（共立出版，2014）
[48] P. J. E. Peebles: *Physical Cosmology* (Princeton University Press, 1971)
[49] P. J. E. Peebles: *The Large-scale Structure of the Universe* (Princeton University Press, 1980)
[50] Ya. B. Zel'dovich and I. D. Novikov: *Relativistic Astrophysics 2: The Structure and Evolution of the Universe* (University of Chicago Press, 1983)
[51] T. Padmanabhan: *Structure Formation in the Universe* (Cambridge University Press, 1993)
[52] P. Coles and F. Lucchin: *Cosmology: The Origin and Evolution of Cosmic Structure*, 2nd Edition (Wiley, 2002)
[53] S. Dodelson: *Modern Cosmology* (Academic Press, 2003)
[54] P. D. Naselsky, D. I. Novikov and I. D. Novikov: *The Physics of the Cosmic Microwave Background* (Cambridge University Press, 2008)
[55] R. Durrer: *The Cosmic Microwave Background* (Cambridge University Press, 2008)

[56] M. Giovannini: *A Primer on the Physics of the Cosmic Microwave Background* (World Scientific, 2008)

数学公式集

[57] 森口繁一，一松信，宇田川銈久『岩波数学公式 I, II, III』（岩波書店，1987）
[58] A. Jeffrey and D. Zwillinger: *Table of Integrals, Series, and Products*, 8th Edition (Academic Press, 2014)
[59] NIST 数学関数デジタル・ライブラリ：`http://dlmf.nist.gov`
[60] H. Bateman: *Higher Transcendental Functions I,II,III*（公開 PDF）：`http://authors.library.caltech.edu/43491/`

索　引

太字は下巻，細字は上巻のページを表す．

サ 行

タ 行

ナ　行

ハ　行

マ　行

ヤ　行

ラ　行

ワ 行

数 字

A

B

C

著者略歴

松原隆彦（まつばら・たかひこ）
1990 年　京都大学理学部卒業．
1995 年　広島大学大学院理学研究科博士課程修了．
京都大学基礎物理学研究所，東京大学大学院理学系研究科，
ジョンズホプキンス大学物理天文学部などを経て，
現　在　名古屋大学大学院理学研究科准教授．博士（理学）．
主要著書　『宇宙論 II　宇宙の進化』（共著，日本評論社，2007），
『現代宇宙論——時空と物質の共進化』
（東京大学出版会，2010），
『宇宙のダークエネルギー——未知なる力の謎を解く』
（共著，光文社，2011），
『宇宙に外側はあるか』（光文社，2012）．

宇宙論の物理　下

2014 年 12 月 25 日　初　版

[検印廃止]

著　者　松原隆彦
発行所　一般財団法人 東京大学出版会
代表者 渡辺　浩
153-0041 東京都目黒区駒場 4-5-29
電話 03-6407-1069　　Fax 03-6407-1991
振替 00160-6-59964
URL http://www.utp.or.jp/
印刷所　大日本法令印刷株式会社
製本所　牧製本印刷株式会社

ISBN978-4-13-062616-3 Printed in Japan